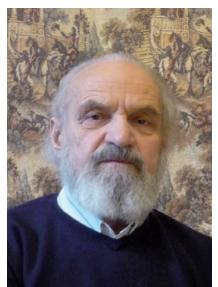


В работе представлен авторский вариант метода математического описания динамики роста размеров разных пластических морфологических признаков и формы тела животных в онтогенезе. Единственным основополагающим математическим выражением в данном методе является геометрическая прогрессия u_{jX_i} . Предложенный метод призван служить альтернативой общепринятым в биометрии и, соответственно, в практике биологических исследований способу описания выборок (x_i ; y_i ; z_i ; ...; k_i) измеренных значений разных пластических признаков и динамики их значений в онтогенезе животных математическими функциями, коэффициенты которых вычисляют по алгоритмам параметрической статистики. Использование геометрической прогрессии позволило автору на примере рыб создать словесный портрет биологического понятия – «норма выраженности значений отдельного пластического морфологического признака и формы тела животных» – это хронографическая воспроизводимость размеров признаков и геометрической формы тела у рыб разных размерных классов в конкретной популяции вида. Для широкой аудитории специалистов, преподавателей и студентов ВУЗов по естественным наукам.

Математические модели

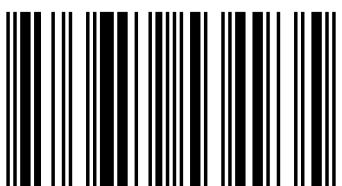


Владимир Беляев



Владимир Беляев

Родился 18 ноября 1943 г. в городе Краснотурьинске (Северный Урал). В 1972 г. закончил заочно Дальрыбвтуз (г. Владивосток) по специальности «Ихтиология и рыбоводство». С 1969 г. по 2008 г. работал в ИЭРИЖ УроРАН (г. Екатеринбург), научный сотрудник. Научные интересы: рост животных. Данная работа - мой автограф в летопись истории Науки о Земле.



978-3-659-53493-5

Беляев

Математические модели пластической морфологии животных

Для широкого круга исследователей
естественных наук

LAP
LAMBERT
Academic Publishing

Владимир Беляев

Математические модели пластической морфологии животных

Владимир Беляев

**Математические модели
пластической морфологии
животных**

**Для широкого круга исследователей
естественных наук**

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum / Выходные данные

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу <http://dnb.d-nb.de>.

Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брэндах и их можно использовать всем без ограничений.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:

LAP LAMBERT Academic Publishing

ist ein Imprint der / является торговой маркой

OmniScriptum GmbH & Co. KG

Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland / Германия

Email / электронная почта: info@lap-publishing.com

Herstellung: siehe letzte Seite /

Напечатано: см. последнюю страницу

ISBN: 978-3-659-53493-5

Copyright / АВТОРСКОЕ ПРАВО © 2014 OmniScriptum GmbH & Co. KG

Alle Rechte vorbehalten. / Все права защищены. Saarbrücken 2014

Введение

В конце третьей четверти двадцатого столетия вышла в свет знаковая для биологов монография М. В.Мины и Г. А. Клевезаль "Рост животных" [1]. В развернутой по времени появления из печати последовательности научных работ здесь, в частности, были проиллюстрированы разные примеры математического описания онтогенетических изменений размерных характеристик тела животных при помощи различных математических функций.

В опубликованных одновременно и более поздних работах [2;3;4] описание динамики роста физических размеров самых разных пластических морфологических признаков животных авторы проводили сами и рекомендовали проводить другим исследователям тем же способом – при помощи математических функций. Расчет углового параметра – тангенса угла наклона функций – выполнялся методом наименьших квадратов на модели линейной регрессии y_i по x_i или x_i по y_i , разработанном, как известно, на основе фундаментальных понятий теории азартных игр. Не замечено при этом, чтобы до сегодняшнего дня биологов разных направлений смущал тот факт, что теория игр, как научное мировоззрение, опирается на такие фундаментальные математические понятия, как независимость и случайность событий, закон нормального распределения событий, в полном соответствии с которыми и были разработаны алгоритмы, по которым они вычисляли и продолжают вычислять параметры различных математических функций [4].

Из [4] следует, что математическое выражение для вычисления выборочного значения углового параметра α модели линейной регрессии той или иной математической функции представляет собой отношение интегральных значений конкретных и разных по сути комбинаций линейных отклонений x_i и y_i в точках $(x_i; y_i)$ от одноименных выборочных средних арифметических \bar{x}_i и \bar{y}_i (ковариация x_i, y_i ; дисперсия x_i). При обращении к расчетной формуле для вычисления выборочных значений коэффициента линейной корреляции r Пирсона видим, что это несколько иное по составу

членов, но аналогичное предыдущему отношение интегральных значений разных комбинаций линейных отклонений x_i и y_i от одноименных выборочных средних арифметических \bar{x}_i и \bar{y}_i в выборках $(x_i; y_i)$ (ковариация x_i, y_i ; средние квадратические отклонения x_i и y_i). То есть в обоих случаях в расчетных формулах α и r имеют место только разности одноименных измеренных и вычисленных значений – $(x_i - \bar{x}_i)$ или $(y_i - \bar{y}_i)$ признаков X и Y . Из этого следует однозначно, что мерой связи (корреляции) между сопряженными x_i и y_i в отдельных точках $(x_i; y_i)$ выборочная оценка r не является [5].

Таким образом, линейная регрессия y_i по x_i или x_i по y_i служит основой вычисления выборочного значения углового параметра α какой-либо математической функции для последующего построения этой функции на плоскости рисунка декартовых координат – и не более того. При этом выборочное значение коэффициента линейной корреляции r Пирсона призвано служить мерой линейного отклонения экспериментальных точек $(x_i; y_i)$ от данной математической функции на плоскости рисунка системы координат OX и OY . Сказанное здесь означает, что к оценке связности x_i и y_i в точках $(x_i; y_i)$ выборочных совокупностей исходных данных и их совместной динамике в процессе роста размеров признаков X и Y "оценки" α и r никакого отношения не имеют.

Как ни странно здесь об этом говорить, но в морфологии животных размеры отдельных признаков взаимосвязаны друг с другом, а случайность проявляется иначе, нежели в процедуре подбрасывания монеты или игральных костей. Растения и животные являются физическими телами с разной степенью сложности их внешнего и внутреннего строения. Примером исходной взаимосвязанности значений разных морфологических пластических признаков, призванных характеризовать строение тела животного, является индекс y_i / x_i , где – согласно теории подобия физических тел – измеренные значения x_i и y_i должны быть выражены в однородных и одного масштаба единицах измерения линии [7].

Размеры пластических морфологических признаков животных теснейшим образом взаимосвязаны с размерами их тела биологически. В онтогенезе, на этапе роста тела животных, абсолютные линейные размеры тела и пластических признаков увеличиваются, но по мере роста размера тела относительный размер головы у рыб, например, уменьшается. Тем не менее нет надобности показывать и доказывать то, что чем больше абсолютные размеры тел у рыб конкретного вида, тем больше у этих рыб и абсолютные линейные размеры головы – и наоборот.

Индекс y_i / x_i есть математическая запись формы биологической взаимосвязи, а поэтому и размерной взаимозависимости между измеренными x_i и y_i значениями признаков X и Y . Биологически взаимосвязаны все без исключения пластические морфологические признаки. Совершенно очевидно, что ликвидировать такую взаимосвязь и, следовательно, взаимозависимость между x_i и y_i невозможно никакими математическими преобразованиями.

Таким образом, индекс y_i / x_i , с одной стороны, есть математическая запись формы биологической взаимосвязанности признаков X и Y – это отношение величин X и Y , с другой – величина отношения измеренных значений x_i и y_i признаков X и Y , когда x_i и y_i выражены в однородных и одного масштаба единицах измерения линии [7;8;9].

Представленное выше суждение о несостоятельности общепринятой процедуры описывать рост животных при помощи разных математических функций, повсеместно выполняемой исследователями всего Мира на протяжении многих десятилетий двадцатого века нашей эры и теперь, обязывает автора этих строк что называется – не сходя с места ответить на вопрос – каким математическим выражением (или выражениями) следует описывать рост животных?

Для ответа на поставленный вопрос и вынужденно забегая вперед вначале мысленно формализуем итоги зрительного представления о принципе роста размеров тела животных, после чего и определим тип математического

выражения, при помощи которого будет возможно отражать рост тела животных в полном соответствии с данным принципом роста.

Известно, например, что мелкие, средние и крупные по размеру тела животные одного вида зрительно похожи друг на друга. Такое зрительное сходство во внешнем облике животных имеет место из-за того, что в процессе роста от мелких до крупных размеров их тел в онтогенезе все линейные расстояния на поверхности тел, площадь поверхности и объем тел животных увеличивались умножительно и примерно в одно и то же число раз.

Адекватное свойство умножительности числовых значений x_i и y_i присущему математическому выражению, не являющемуся математической функцией, которое именуется геометрической прогрессией y_i / x_i [9;10]. Выбор геометрической прогрессии y_i / x_i для оценки особенностей динамики морфологического строения тела рыб в онтогенезе апробирован ранее и представлен в работах [11;12;13]. Результаты цитированных в этом абзаце работ автора в полной мере определили перспективу использования геометрической прогрессии y_i / x_i для математического описания роста животных. Принято, что геометрическая прогрессия y_i / x_i однозначно описывает совместную динамику измеренных значений x_i и y_i любых пластических морфологических признаков X и Y . Таким образом, математическое выражение – геометрическая прогрессия – является ответом на поставленный выше вопрос о том, "каким математическим выражением следует описывать рост животных?". Принцип связи значений x_i и y_i в геометрической прогрессии y_i / x_i – отношение и произведение их величин в процессе динамики значений признаков X и Y в онтогенезе животных.

В книге представлены в развернутом виде алгоритмы предварительного преобразования исходных данных для создания математической модели формы тела животных и разные способы расчета значений параметра q для описания совместной динамики измеренных значений x_i и y_i разных сочетаний пластических морфологических признаков X и Y и формы тела животных при помощи геометрической прогрессии y_i / x_i . Иллюстрация динамики сочетаний x_i

и у_i проведена в основном на примере рыб разных видов, природные популяции которых обитают в естественных водоемах западного и восточного склонов Уральских гор – от Приполярного Урала до Южного Урала.

Автор выражает благодарность доктору биологических наук, профессору В. Н. Казаченко и преподавателям кафедры "Водные биоресурсы и аквакультура" Дальневосточного государственного технического рыбохозяйственного университета (г.Владивосток, Россия) за помощь по рецензированию и дальнейшему опубликованию в журнале "Научные труды Дальрыбвтуза" его работ, явившихся весомым вкладом при создании данной публикации.

Моим учителям – первому коллективу
преподавателей кафедры "Ихиологии
и рыбоводства" Дальрыбвтуза
(г. Владивосток, Россия) - посвящаю

Автор

Глава 1. Создание математической модели формы тела животных

1.1. Построение виртуальной модели зрительного облика животных

Моделирование внешнего строения тела животных (формы тела) во второй половине двадцатого века проводилось преимущественно на основе фундаментальных понятий математики и физики [14;15] и, вероятно, по этой причине результаты отмеченных и других работ не были востребованы биологами. Математическая модель формы тела, разработанная автором, была представлена научной общественности недавно. Иллюстрация её приложимости для воспроизведения графической картины и проведения количественной оценки функциональной связаннысти значений нескольких пластических морфологических признаков у разных по размеру тела рыб впервые приведена в работе [13].

Упомянутая работа выполнена на материалах измерения пяти пластических признаков самок и самцов пеляди (*Coregonus peled* Gmelin), отловленных автором в реке Хулга осенью 1972г. (Приполярный Урал, бассейн реки Северная Сосьва), и пяти пластических признаков самок и самцов щуки (*Esox lucius* L.), отловленных в озере Миассово (Южный Урал) в 1981-1988гг. Для иллюстрации привлечены выборки измеренных значений следующих признаков: l – промысловая длина тела рыб (линейный промер от конца рыла до конца чешуйного покрова на хвостовом стебле), Q – масса тела, H – высота тела, B – толщина тела, lC – длина головы слева, M – масса головного мозга, C – масса сердца, P – масса печени. Значения всех перечисленных признаков выражены в сантиметрах – однородных и одного масштаба единицах измерения линии в системе СИ [7]. Для этого из всех отдельно взятых выборочных

значений массы тела и внутренних органов, измеренных в граммах, извлечен кубический корень [16].

Кубический корень из массы любого физического тела есть сторона куба, наполненного дистиллированной водой, масса которого при 20°C и нормальном атмосферном давлении равна массе этого тела. При этом условии длина стороны куба – отрезок прямой линии, является адекватной линейной характеристикой массы и объема любого физического тела [13], а поэтому должна быть поименована как условная масса тела с размерностью сантиметр. Если значение условной массы тела Q (см) животного или любого другого физического тела возвести в квадрат и умножить на число шесть, то получим площадь поверхности куба, равную $6Q^2$, с размерностью сантиметр в квадрате.

Тогда $\sqrt{6Q^2} = Q\sqrt{6}$ – сторона квадрата – есть линейное выражение (в см) площади поверхности тела данного животного или любого другого физического тела и, следовательно, должна быть поименована как условная площадь поверхности физического тела больше условной массы в $\sqrt{6}$ раз [9]. Количественной характеристикой любого пластического признака в выборочной совокупности его значений служит средняя геометрическая:

$$\tilde{x}_i = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (x_i)} = \exp \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln x_i) \right]. \quad (1)$$

Строение поверхности тела, черепа млекопитающих (головы рыб), осевого скелета, размеры тела и внутренних органов животных традиционно описывают по результатам линейных промеров и измерений массы некоторого числа соответствующих пластических признаков. Понятно при этом, что линейные промеры и условно линейные значения (условная масса тела и внутренних органов – выраженные в сантиметрах исходные значения массы этих признаков) малых и средних по величине признаков могут отличаться от промера длины тела животного в разы, десятки и сотни раз.

Для иллюстрации сказанного на ось OX рисунка (1,а) системы прямоугольных координат OX и OY нанесем произвольно взятое значение

длины тела животного – x_i , а на ось OY – n произвольных значений $y_{i,1}$ некоторого числа других пластических признаков, где $i = 1, 2, 3, \dots, n$ – порядковые номера признаков Y и все $y_{i,1} < x_i$. По соотношению (1) вычислим $\tilde{y}_{i,1}$, после чего точку $(x_i; \tilde{y}_{i,1})$ нанесем на тот же рисунок.

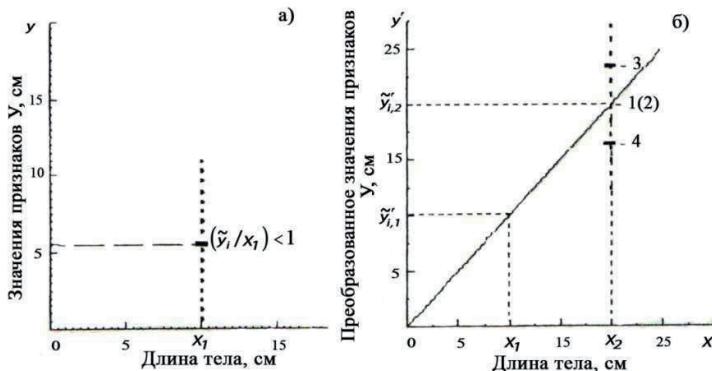


Рис.1. Построение отправной точки $(x_i; \tilde{y}'_{i,1})$ модели ДИВО. 1, 2, 3, 4 – варианты расположения точки $(x_2; \tilde{y}'_{i,2})$ на плоскости координат по отношению к отрезку модельной прямой (пояснение в тексте).

Видно без результата вычисления – величина отношения $\tilde{y}_{i,1}/x_i$ в этой точке меньше x_i . Теперь вычислим $x_1/y_{1,1}; x_1/y_{2,1}; \dots; x_1/y_{n,1}$ для каждого из n значений признаков Y на рисунке (1,а) и назовем эти величины исходными (стартовыми) модельными отношениями между измеренным значением x_1 (длина тела) и измеренными значениями $y_{i,1}$ конкретных пластических признаков Y животного.

Увеличим каждое $y_{i,1}$ рисунка (1,а) в $x_1/y_{i,1}$ раз таким способом:

$$y_{1,1}(x_1/y_{1,1}) = y'_{1,1} = x_1; y_{2,1}(x_1/y_{2,1}) = y'_{2,1} = x_1; \dots; y_{n,1}(x_1/y_{n,1}) = y'_{n,1} = x_1. \quad (2)$$

На плоскость рисунка (1,б) системы координат OX и OY' нанесем точку $(x_i; \tilde{y}'_{i,1})$, где $\tilde{y}'_{i,1} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (y'_{i,1})} = x_1$. Последнее означает, что точка $(x_i; \tilde{y}'_{i,1})$ на рисунке (1,б) отражает координаты двумерного изометрического виртуального

облика (ДИВО) этого животного – его форму тела на плоскости рисунка системы декартовых координат. При этом на листе бумаги может быть воспроизведена фигура правильного многоугольника, у которого длина каждой из $n+1$ сторон равна длине тела животного – x_1 . Рисунок правильного многоугольника – это графическая модель двумерного изометрического виртуального облика животного, призванная олицетворять форму его тела.

Через точку $(x_1; \tilde{y}'_{1,1})$ на рисунке (1,б) проведем из начала координат отрезок прямой линии модели ДИВО первого животного. На ось OX рис. (1,б), правее x_1 , нанесем x_2 – значение длины тела второго животного того же вида. Очевидно при этом, что размеры тела второго животного больше, чем первого. Естественно предполагать, что у более крупного по длине тела животного несколько больше и линейные промеры тех же признаков Y , какие были представлены у первого животного на рисунке (1,а).

Каждое из n значений $y_{i,2}$ увеличим аналогично тому, как это проделано выше, то есть для вычислений используем модельные отношения первого животного:

$$y_{1,2}(x_1/y_{1,1})=y'_{1,2}; y_{2,2}(x_1/y_{2,1})=y'_{2,2}; \dots; y_{n,2}(x_1/y_{n,1})=y'_{n,2}. \quad (3)$$

В итоге $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (y'_{i,2})} = \tilde{y}'_{i,2}$ и точки $(x_2; y'_{i,2})$ и $(x_2; \tilde{y}'_{i,2})$ могут быть нанесены

на рисунок (1,б). Рассмотрим возможные варианты расположения этих точек на плоскости рисунка.

Если первое и второе животные по своему внешнему строению (облику) являются полными геометрическими аналогами, то любое выборочное значение $y'_{i,2} = \tilde{y}'_{i,2} = x_2$, точки $(x_2; y'_{i,2})$ совместятся с точкой $(x_2; \tilde{y}'_{i,2})$, которая, в свою очередь, наложится на линию ДИВО (позиция 1 на рис. 1,б). Ясно, что этот вариант гипотетический. Вероятнее ожидать иной результат – точка $(x_2; \tilde{y}'_{i,2})$ попадает на линию ДИВО, но отдельные точки $(x_2; y'_{i,2})$ расположатся на плоскости координат выше и ниже этой линии (позиция 2). Наиболее реальны, однако, варианты расположения точки $(x_2; \tilde{y}'_{i,2})$ выше (позиция 3) или ниже (позиция 4) линии ДИВО. Сказанное справедливо и для случая, при котором

размеры третьего, четвертого и т.д. животных меньше, чем размеры первого животного. Проиллюстрируем это на примере выборки пятилетних самок щуки ($n=21$), у которых промерены и выражены в сантиметрах длина, высота, толщина и условная масса тела. Выборочные средние геометрические значения признаков: $\tilde{l}_i=45.84\text{ см}$, $\tilde{Q}_i=9.29\text{ см}$, $\tilde{H}_i=6.89\text{ см}$, $\tilde{B}_i=4.50\text{ см}$. В этом примере выборочная \tilde{l}_i соответствует \tilde{x}_i , а отдельные $l_i - x_i$.

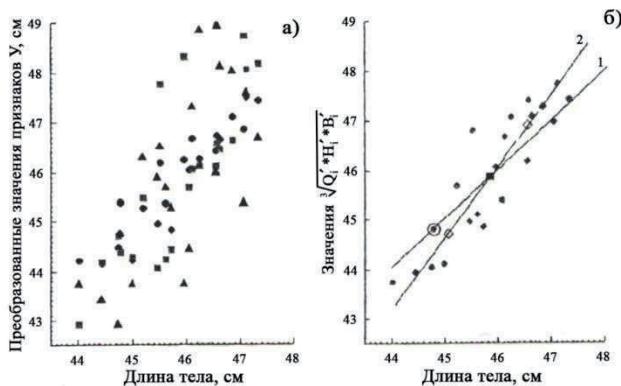


Рис.2. Последовательность построения линии функциональной связности выборочных значений четырех пластических признаков пятилетних самок щуки ($n=21$, пояснение в тексте)

Обозначения: а) ● – точки $(l_i; Q_i)$, ■ - $(l_i; H_i)$, ▲ - точки $(l_i; B_i)$, ◇ - геометрический центр распределения всех типов точек; б) 1 – линия ДИВО, 2 – выборочная линия двумерного виртуального облика разных по длине тела самок щуки, ◇ - реперные точки линии 2, ■ – геометрический центр распределения точек.

По выборочным средним \tilde{l}_i , \tilde{Q}_i , \tilde{H}_i , \tilde{B}_i вычислим исходные модельные отношения: \tilde{l}_i/\tilde{Q}_i , \tilde{l}_i/\tilde{H}_i , \tilde{l}_i/\tilde{B}_i . Все отдельно взятые выборочные значения Q_i увеличим в \tilde{l}_i/\tilde{Q}_i раз: $Q_i(\tilde{l}_i/\tilde{Q}_i)=Q'_i$, все H_i - в \tilde{l}_i/\tilde{H}_i раз: $H_i(\tilde{l}_i/\tilde{H}_i)=H'_i$ и все B_i - в \tilde{l}_i/\tilde{B}_i раз: $B_i(\tilde{l}_i/\tilde{B}_i)=B'_i$. Точки $(l_i; Q'_i)$, $(l_i; H'_i)$, $(l_i; B'_i)$ нанесем на рисунок (2,а) системы координат OX и OY' . Видно, что каждому l_i на плоскости

координат соответствуют три точки с такими координатами. В геометрическом центре распределения точек на плоскости: $\sqrt[21]{\prod_{i=1}^{21}(Q'_i)} = \tilde{Q}'_i = \tilde{l}_i$; $\sqrt[21]{\prod_{i=1}^{21}(H'_i)} = \tilde{H}'_i = \tilde{l}_i$; $\sqrt[21]{\prod_{i=1}^{21}(B'_i)} = \tilde{B}'_i = \tilde{l}_i$. Значение координаты $\tilde{y}'_{i,2}$ для каждого l_i вычислим по формуле:

$$\tilde{y}'_{i,2} = \sqrt[3]{\tilde{Q}'_i \cdot \tilde{H}'_i \cdot \tilde{B}'_i}, \quad (4)$$

где Q'_i, H'_i, B'_i – сопряженные с l_i значения признаков Y каждой конкретной самки щуки. И в этом случае $\sqrt[21]{\prod_{i=1}^{21}(\tilde{y}'_{i,2})} = \tilde{\tilde{y}}'_{i,2} = \tilde{l}_i$. Точки $(l_i; \tilde{y}'_{i,2})$ нанесем на рисунок (2,б), после чего начало координат и геометрический центр $(\tilde{l}_i; \tilde{\tilde{y}}'_{i,2})$ распределения точек на плоскости координат соединим прямолинейным отрезком линии ДИВО. Видно, что только одна точка $(l_i; \tilde{y}'_{i,2})$ совпала с линией ДИВО (обведена кружком).

В итоге по четырем признакам выборочный геометрический ДИВО самок щуки – квадрат, а каждой самки в отдельности – равнобочная трапеция $(l_i; \tilde{y}'_{i,2})$ – смотреть соотношение (4), разной степени выраженности, у которой длина верхнего основания равна длине боковых сторон.

Так, как показано в работе [13]^{*}, вычислим по данным рисунка (2,б) координаты реперных точек и проведем линию функциональной связности выборочных значений признаков l, Q, H, B . На фоне линии ДИВО отчетливо видно, что по отношению к длине тела условная масса, высота и толщина тела у крупных самок щуки, в среднем, больше, чем у самок меньшего размера. Иначе говоря, значения признаков Q, H, B у самок в выборке связаны с длиной тела положительной аллометрической зависимостью.

А теперь проиллюстрируем динамику совместного роста значений пяти пластических признаков: l, Q, H, B, IC , на материалах по росту самцов щуки в озере Миассово на отрезке времени жизни рыб этой генерации в озере от двухлетнего (в 1981 г.) до девятилетнего (в 1988 г.) возраста (данные

^{*} Способ расчета реперных точек рассмотрен подробно в отдельной главе.

профильные). К месту напомнить, что измеренные в граммах значения массы тела рыб представлены здесь в виде значений условной массы с размерностью – сантиметр, как и у остальных признаков. Процедура преобразования измеренных значений массы тела в значения условной массы тела представлена выше.

Для каждой из сорока выборок исходных данных рассчитаем выборочные средние геометрические значения по (1). Затем по выборочным средним геометрическим значениям пяти признаков рыб в первой пробе (возраст рыб – 1+ лет) вычислим четыре модельных отношения: $\tilde{l}_{i,1}/\tilde{Q}_{i,1}(5)$; $\tilde{l}_{i,1}/\tilde{H}_{i,1}(6)$; $\tilde{l}_{i,1}/\tilde{B}_{i,1}(7)$; $\tilde{l}_{i,1}/\tilde{C}_{i,1}(8)$. Видно: $\tilde{Q}_{i,1} \bullet (5) = \tilde{l}_{i,1}$; $\tilde{H}_{i,1} \bullet (6) = \tilde{l}_{i,1}$; $\tilde{B}_{i,1} \bullet (7) = \tilde{l}_{i,1}$; $\tilde{C}_{i,1} \bullet (8) = \tilde{l}_{i,1}$, и понятно, что тем самым отдельные и средние выборочные значения $y_{i,1}$ и $\tilde{y}_{i,1}$ признаков Q, H, B, IC могут быть переведены в масштаб длины тела $l(Q', H', B', IC')$.

Результаты вычислений нанесем на плоскость рисунка системы прямоугольных координат OX и OY' и точки с одноименными признаками соединим прямолинейными отрезками (рисунок 3). Эмпирические линии 2 – 5 на рисунке построены по результатам измерений, значения которых предварительно переведены в масштаб длины тела рыб и отражают динамику попарно сопряженных выборочных средних геометрических значений четырех признаков Y и длины тела по мере роста генерации самцов щуки от года к году: линия 2 - $(\tilde{l}_i; \tilde{Q}'_i)$, линия 3 - $(\tilde{l}_i; \tilde{H}'_i)$, линия 4 - $(\tilde{l}_i; \tilde{B}'_i)$, линия 5 - $(\tilde{l}_i; \tilde{C}'_i)$. Далее по выборочным средним геометрическим четырех признаков Y в первой и в последующих пробах рыб вычислим по (4) значения \tilde{y}'_i ; точки $(\tilde{l}_i; \tilde{y}'_i)$ нанесем на рисунок 3, после чего соединим эти точки прямолинейными отрезками (линия 6). И, наконец, из начала координат и точку $(\tilde{l}_{i,1}; \tilde{y}'_{i,1})$ – исходная модель формы тела самцов, проведем линию ДИВО (линия 1). Понятно, что линия 6 отражает динамику значений формы тела \tilde{y}'_i и длины тела \tilde{l}_i , где \tilde{y}'_i представлены в масштабе длины тела, и практически совпала с линией 2.

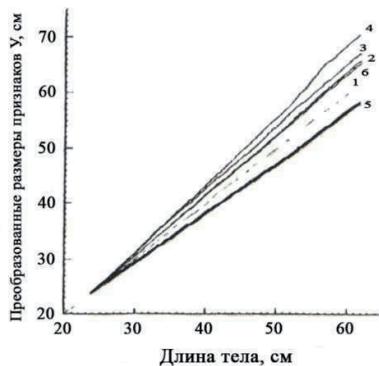


Рис.3. Соотносительная динамика размеров отдельных признаков и формы тела с длиной тела самцов щуки в оз. Миассово с 1981г. по 1988г. по пяти пластическим признаком. Цифровое обозначение линий связи значений признаков см. в тексте.

Построенная на рисунке 3 линия 6 с определенной степенью информативности отражает динамику двумерного виртуального облика самцов щуки в процессе роста особей генерации щуки в озере. Понятно, что при большем числе признаков степень информативности должна быть иной. Однако на фоне линии ДИВО на рисунке 3 отчетливо видно, что эта эмпирическая линия, в среднем, отражает динамику реального – зрительно воспринимаемого облика самцов: по мере роста рыб проявилась четкая положительная аллометрия роста между длиной тела и линейными размерами признаков Y (линия 6, индексы по порядку: 1.0; 1.014; 1.027; 1.035; 1.038; 1.045; 1.056; 1.056). Другие эмпирические линии на рис.3 отражают положительную аллометрию между длиной и условной массой тела (линия 2: 1.0; 1.015; 1.028; 1.041; 1.044; 1.052; 1.063; 1.065), длиной и высотой (линия 3: 1.0; 1.030; 1.063; 1.069; 1.070; 1.087; 1.085; 1.087), длиной и толщиной тела (линия 4: 1.0; 1.033; 1.056; 1.082; 1.103; 1.114; 1.147; 1.141), а также отрицательную аллометрию роста между длиной тела и длиной головы у рыб (линия 5: 1.0; 0.980; 0.965; 0.954; 0.942; 0.935; 0.941; 0.941). Следует ожидать, что специально подобранная

комбинация пластических признаков (с положительной и отрицательной аллометрией роста по отношению к линии модели ДИВО) позволит разработать стандартную схему для воспроизведения статики и динамики внешнего облика (формы тела) у рыб разных видов и других животных. Оценка различий по $(x_i; y'_i)$ или $(x_i; \tilde{y}'_i)$ у мелких и крупных по размерам тела рыб в популяции вида может быть выполнена тем же способом, какой был использован для сравнения разных выборок $(x_i; y_i)$ в работе [11] (см. ниже).

Не менее актуальны графическая и количественная иллюстрации процесса совместной динамики размеров тела и внутренних органов животных в постнатальном онтогенезе. Решение этой задачи на основе модели ДИВО связано с аналогичным преобразованием масштаба и размерности измеренных значений признаков и возможно только при наличии исходной информации, действительно отражающей процесс онтогенеза конкретной группы или генерации животных. Использованные ниже данные по классификации Ричардса и Кэвенэ [1, с.105-106] относятся к смешанным профильным. То есть на следующем рисунке представлены данные, которые отражают соотношение между длиной тела (признак X) и условной массой тела, головного мозга, сердца и печени (признаки Y) у пяти – десятилетних самок пеляди нерестовой части популяции вида, отловленных в одном из мест зимовки (зимовальная яма в русле реки) после завершения нереста в реке Хулга и находящихся поэтому в сравнительно одинаковом физиологическом состоянии [13].

Результаты предварительного преобразования исходных данных (схема преобразования данных предыдущего примера) нанесены на плоскость рисунка 4 системы координат OX и OY . Из начала координат и исходную точку $\tilde{l}_{i,1}; \tilde{y}'_{i,1}$ модели ДИВО, где

$$\tilde{y}'_{i,1} = \sqrt[4]{\tilde{Q}'_{i,1} \cdot \tilde{C}'_{i,1} \cdot \tilde{\Pi}'_{i,1} \cdot \tilde{M}'_{i,1}} = \tilde{l}_{i,1}, \quad (9)$$

проведем отрезок прямой линии 1. Назовем этот отрезок модельной прямой линией двумерного изометрического соотношения длины тела и условно линейных размеров органов – значений условной массы тела, условной массы

сердца, условной массы печени, условной массы мозга – у 4+ – 9+ летних самок пеляди.

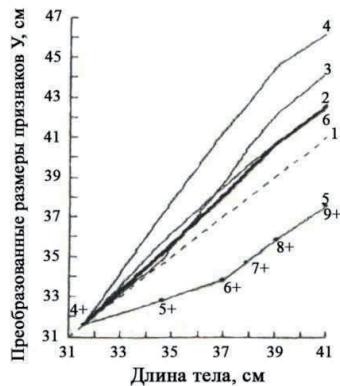


Рис.4. Соотношение между длиной тела и преобразованными значениями размеров четырех пластических признаков у самок пеляди разного возраста из р.Хулга (пояснение в тексте).

Эмпирические линии на рисунке 4 отражают картину соотношения выборочных средних геометрических значений признаков Y и длины тела у разных по длине тела и возрасту самок: линия 2 – соотношение между длиной тела и преобразованной условной массой тела (индексы: 1.0; 1.033; 1.039; 1.041; 1.042; 1.037), линия 3 – длиной тела и преобразованной условной массой сердца (1.0; 1.006; 1.046; 1.067; 1.077; 1.078), линия 4 – длиной тела и преобразованной условной массой печени (1.0; 1.073; 1.117; 1.125; 1.139; 1.128), линия 5 – длиной тела и преобразованной условной массой головного мозга (1.0; 0.948; 0.914; 0.915; 0.916; 0.915). Линия 6 отражает соотношение между $\tilde{l}_{i,1}, \tilde{l}_{i,2}, \dots, \tilde{l}_{i,6}$ и $\tilde{y}'_{i,1}, \tilde{y}'_{i,2}, \dots, \tilde{y}'_{i,6}$ у тех же рыб в шести возрастных группах (1.0; 1.014; 1.026; 1.034; 1.040; 1.036).

По значениям индексов на линиях 2-4, а также на линии 6 отчетливо видно, как по мере роста размеров тела рыб от возраста к возрасту величины индексов $\widetilde{Q}'_i/\tilde{l}_i, \widetilde{C}'_i/\tilde{l}_i, \widetilde{\Pi}'_i/\tilde{l}_i$ и $\widetilde{y}'_i/\tilde{l}_i$ увеличиваются и достигают

максимальных значений у девятилетних самок (возраст 8+ лет). То есть с возрастом самки "тяжелеют", а в верховья реки Хулга поднимаются особи, у которых, в среднем, относительные размеры сердца и печени в каждой, по порядку увеличения возраста, генерации пеляди больше, чем в предыдущей. На линии 5 величина индекса \tilde{M}'_i/l_i у самок от 5+ лет и старше меньше модельного значения – 1.0, но от возраста 6+ лет до 9+ лет одинакова (0.914; 0.915; 0.916; 0.915), что не согласуется с известным из литературных источников снижением индекса мозга у рыб с возрастом [17].

Дальнейшая иллюстрация соотношения между длиной тела и преобразованными значениями четырех пластических признаков у самок пеляди из реки Хулга связана с такими понятиями, как собственные размеры пластических признаков и собственный возраст животных. Поэтому прежде необходимо ознакомить читателя с предысторией возникновения данных понятий, способом расчета и использования их значений при анализе размерной и возрастной структур популяций рыб.

1.2. Способ расчёта собственных размеров пластических признаков и собственного возраста животных

Первое авторское определение понятия собственное (биологическое) время было приведено в работе [18], где подробно рассмотрен вопрос о замене шкалы единиц астрономического времени шкалой других единиц измерения длительности процесса развития и роста биологических объектов. В качестве иллюстрации шкалы собственного (биологического) времени в работе [18] использованы табличные сведения по зародышевому развитию шести видов водных животных. [19]. Выбор рассмотренного в работе [18] варианта сходной по биологическому смыслу единицы биологического времени у разных видов животных основан на изначальном представлении о нелинейном – мультиплекативном (умножительном) течении времени жизни этих животных. В соответствии с таким представлением и предложен способ преобразования и последовательность использования исходных данных для отражения в линейном виде времени в цепи превращений, происходящих у животных в

процессе жизни. По мнению автора такой подход позволяет однозначно фиксировать и сопоставлять время наступления и завершения конкретных событий в онтогенезе животных и сравнивать их продолжительность.

С понятием собственный размер тела и пластических морфологических признаков мы впервые знакомимся в работе [20], где автор пытается показать, что рост и развитие животных разных видов осуществляются по одному принципу, а формализация этих процессов и оценка размеров пластических признаков, как и возраста животных, возможны в единицах измерения, отличных от общепринятых физических.

Не вызывает сомнения то, что в процессе роста крупное (взрослое) животное вырастает из животного меньшего размера и возраста. При этом по мере роста форма тела животного, как правило, существенно меняется [21]. Тем не менее можно утверждать, что с увеличением размера тела растущего животного морфологическое сходство в его строении на близких друг от друга отрезках времени роста сохраняется, и даже при возникновении существенных различий по ряду признаков мелкие и крупные животные одного вида в целом остаются похожими друг на друга. Из этого следует, что в основе роста проявляется единый для большой группы видов позвоночных животных принцип воспроизведения и, как следствие, сохранения (в определенных пределах) видоспецифичной формы их тел. Покажем, при каком условии роста животных может полностью или частично сохраняться в неизменном виде первоначально измеренная форма их тела и, если следить за ростом группы животных, первоначальная иерархия по размерам тел в группе.

Отдельное животное или группа животных одного вида, примерно одинаковых по внешнему и внутреннему строению, но отличающихся размерами тела, в процессе роста могут полностью или частично – в пределах видовой изменчивости, сохранять в неизменном виде форму своего тела и исходную иерархию по размерам и массе тел в группе, если увеличение числовых значений всех признаков, представленных в физических единицах измерения и призванных характеризовать строение тела этих животных, будет

происходить мультипликативно (умножительно). При этом значения каждого из признаков, выраженные одноименными единицами измерения, должны увеличиваться либо в одно и то же число раз (изометрическая мультипликация), либо в разное (аллометрическая мультипликация) на отрезке времени между двумя смежными измерениями отдельного животного или группы животных. В этом и заключается принцип мультипликативного (умножительного или геометрического) роста. Попытки формулирования и математической интерпретации геометрического роста животных приведены в предыдущих работах автора [18;22].

Позвоночные животные разных видов различаются между собой как по физическим размерам, так и по календарной продолжительности жизни в десятки и сотни раз. Поэтому воспроизвести совместимую по масштабам графическую иллюстрацию роста животных таких видов на плоскости рисунка системы декартовых координат, числовые оси которой размечены в единицах метрической системы, или какой-то другой системы единиц измерения размеров физических тел, невозможно.

Положительное решение проблемы совместимости размеров и возраста животных разных видов возможно, если принять условие, согласно которому животные разных видов на завершающей и одинаковой по сути стадии жизнедеятельности – старости – имеют одинаковые биологические размеры и находятся в одинаковом биологическом возрасте [20].

Принятое условие попытаемся количественно формализовать. Допустим, что для особей ряда биологических видов животных в пределах их ареалов определены в единицах метрической системы следующие признаки: средние видовые оптимальные или максимальные размеры тел взрослых животных; средняя оптимальная или максимальная календарная продолжительность жизни особей каждого конкретного вида [23]; среднее время наступления одних и завершения других периодов развития и роста, характерных либо только для животных одного вида, либо для животных разных видов с момента начала

жизни особи; средние размеры тела животных при наступлении или завершении разных периодов развития и роста.

В первом приближении для перехода от физических единиц измерения размеров и возраста к единицам собственных размеров и собственного возраста были проведены по формальным правилам математики следующие действия [20]. Делением логарифма величины максимальной календарной продолжительности жизни особей одного вида на произвольно выбранное число 20 стало возможно построить на числовой оси арифметическую прогрессию с конечным числом членов – шкалу единиц измерения собственного (биологического) времени жизни животных этого вида. Аналогичным делением логарифма величины максимальной календарной продолжительности жизни особей другого вида на то же самое число частей, что и у предыдущего вида, стало возможно нанести на первоначально выбранной числовой оси шкалу единиц измерения собственного времени жизни животных другого вида, по числу и месту разбиений полностью совместимую со шкалой единиц измерения собственного времени жизни особей предыдущего вида.

Руководствуясь тем же принципом, на другой числовой оси прямоугольной системы координат строим совместимую по месту и одинаковую по числу разбиений шкалу единиц измерения собственных (биологических) размеров или массы тела животных разных видов. В итоге, например, на одном рисунке прямоугольной системы координат становится возможным проводить сравнение динамики размеров или массы тела животных разных видов в собственном времени их жизни, хотя дефинитивные размеры тела и продолжительность жизни животных этих видов, выраженные в физических единицах, могут сильно отличаться по величине. А теперь представим алгоритм перевода измеренных значений длины, массы тела и календарного возраста животных в единицы собственных размеров и собственного возраста на примере данных о росте особей тугуна (*Coregonus*

tugun Pall.) в реке Хатанга – Хета [24], где особи этого вида рыб доживают до восьмилетнего возраста.

Делением логарифма средней длины тела тугуна в возрасте 7+ лет на число 20 получаем величину одной единицы собственной длины тела. Последующее деление логарифмированных значений средней длины тела рыб в возрасте 3+ - 6+ лет на величину одной единицы собственной длины позволяет узнать, какому числу единиц собственной длины соответствует средняя длина тела рыб в разном календарном возрасте. Поступим иначе – разделим число 20 на величину логарифма средней длины тела тугуна в возрасте 7+ лет и получим некое число $q'_x : 20 / \ln \bar{x}_i = q'_x$ (10). Умножение логарифмированных значений средней длины тела тугуна в возрасте 3+ - 6+ лет на число q'_x приведет к тому же результату: $x_{i,\text{собстн}} = \ln x_i \cdot q'_x$ (11). Вычисление собственного возраста рыб в разные моменты их жизни проведено аналогично: $20 / \ln t_{\max} = q'_t$ и $t_{i,\text{собстн}} = \ln t_i \cdot q'_t$ (12). При этом из-за недостаточно строгой датировки возраста рыб символами 1+, 2+, ..., + лет последние у тугуна из реки Хатанга-Хета и у всех других видов рыб пересчитаны на число прожитых месяцев, после чего вычислялось q'_t , или значение единицы собственного времени жизни по результатам отлова рыб в разных водоемах [20]. Первоначально результаты проведенных преобразований измеренных значений признаков устраивали автора в полной мере. Однако после того, как были четко сформулированы правила работы с цифровыми базами данных [11,12], потребовалось провести соответствующую коррекцию соотношений (11) и (12).

Дело в том, что мерой отношения измеренных сопряженных значений $x_i ; y_i$ признаков X и Y служит известный всем геометрический индекс (y_i/x_i) (см. выше). После его логарифмирования получаем $\ln(y_i/x_i) = \ln y_i - \ln x_i$. Результаты записи выражения:

$$\exp\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln y_i - \ln x_i)\right] = \exp\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i\right] = \text{ind}(\tilde{y}_i/\tilde{x}_i) = \widetilde{\text{ind}}(y_i/x_i), \quad (13)$$

где \tilde{x}_i и \tilde{y}_i – выборочные средние геометрические значения признаков X и Y , $\widetilde{\text{ind}}(y_i/x_i)$ – выборочный средний геометрический индекс, очевидны –

выборочные x_i , y_i , y_i/x_i связаны по одному принципу – умножительно [11]*. Видно и другое – одноименные выборочные $\ln x_i$ или $\ln y_i$, как и сопряженные ($\ln x_i$; $\ln y_i$) связаны между собой по принципу сложения или вычитания величин и никак иначе. Если вернуться к соотношениям (11) и (12), то становится понятно, что тип связи $x_i, y_i, y_i/x_i$ не соответствует тому, что только что показано и должно быть на самом деле. Поэтому переходить от физических единиц измерения к собственным следует не по отношениям (11) и (12), а по соотношениям:

$$x_{i,\text{собстv.}} = x_i \cdot q'_x \quad (14)$$

$$t_{i,\text{собстv.}} = t_i \cdot q'_t, \quad (15)$$

где $q'_x = 20/x_{\max}$; $q'_t = 20/t_{\max}$ при условии, когда x_i и y_i выражены в однородных и одного масштаба единицах измерения линии (см. начало главы и [11]).

Информативность (14) и (15) проиллюстрируем на примере данных из работы [20]. На рисунке 5 воспроизведен рисунок 4 из этой работы. На рисунке 6 исходные данные по росту щук предварительно были преобразованы по соотношениям (14) и (15).

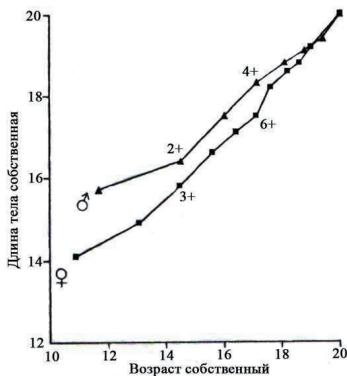


Рис.5. Рост самок и самцов щуки в оз. Миассово, выраженный в единицах измерения собственных размеров тела и собственного возраста (рис.4 из работы [20]).

* Употребляемый в словосочетании – рост животных – термин умножительный выполняет в данной работе функцию синонима слов мультипликативный и геометрический (примечание автора).

Сопоставим пятый и шестой рисунки. На рисунке пять отчётливо видно, что массовое половое созревание самок – в календарном возрасте 3+ лет, и самцов щуки – 2+ лет, наступает во второй половине их собственного времени жизни, в то время как на рисунке шесть – в первой его половине. Искажение сроков полового созревания рыб на пятом рисунке очевидно. С другой стороны, на рисунках 5 и 6 в собственном времени жизни самки мельче одновозрастных самцов и в массе созревают в одном возрасте с самцами или чуть раньше. Оценки в целом согласуются, хотя и рассчитаны разными способами.

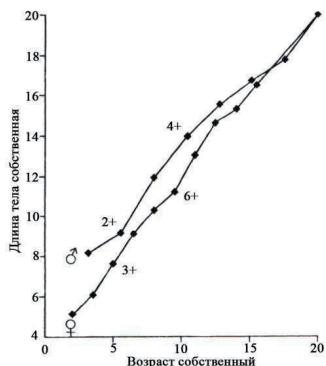


Рис.6. Рост самок и самцов щуки в оз. Миассово, выраженный в единицах измерения собственных размеров тела и собственного возраста по формулам (14) и (15).

Значение собственной массы тела в работе [20] первоначально было рекомендовано вычислять по соотношению $\ln y_2 = \ln y_1 + 3(q'_x - 1) \cdot \ln x_1$ (16), где x_1 – длина тела рыб в см, y_1 – сопряженное с x_1 значение массы тела в граммах, $q'_x = 20 / \ln x_{max}$. Однако в соотношении (16) $\ln x_{i,1}$ и $\ln x_{max}$ связаны по принципу отношения величин. То есть в (16) условие мультипликативной связи между x_i не выполняется, так же как и между x_i и y_i . Поэтому для соблюдения мультипликативной связи между собственной длиной и собственной массой тела следует значения собственной массы тела вычислять по соотношению:

$$y_{i,\text{собстн.}} = y_i \cdot q'_x, \quad (17)$$

где y_i – условная масса тела рыб, см, $q'_x = 20/x_{max}$ из (14) [11]. Необходимо представлять x_i и y_i в однородных и одного масштаба единицах измерения линии. В итоге – переходит от физических единиц измерения длины и массы тела животных к собственным следует по соотношениям (14) и (17), соответственно.

Сказанное проиллюстрируем путем воспроизведения на рисунке 7 рисунка 4 из [11].

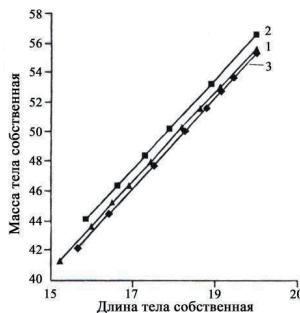


Рис.7. Соотношение между длиной и массой тела у верховки (1), тилапии (2) и самцов щуки (3), выраженное в единицах измерения собственной длины и собственной массы тела (рис.4 из работы [11]).

После преобразования исходных данных рисунка 4 из [11] по соотношениям (14) и (17) полученные результаты используем для создания рисунка 8 и тем самым воспроизведем рисунок 5 из [11]. На рисунках 7 и 8 эмпирические линии расположены на разных участках плоскости координат – точно так, как на рисунках 4 и 5 в [11]. При этом межвидовые различия по соотношению длина тела – масса тела у рыб на рисунке 8 проявлены более четко, чем на рисунке 7.

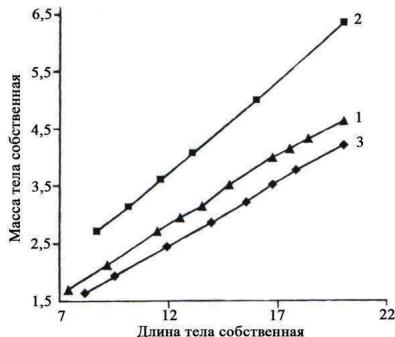


Рис.8. Соотношение между длиной и массой тела у верховки (1), тиляпии (2) и самцов щуки (3). Значения собственной длины тела и собственной массы тела вычислены по (14) и (17).

На рисунках 7 и 8 видно, что величины отношений масса тела – длина тела (y_i/x_i) в разных возрастных группах самцов щуки минимальны по сравнению с аналогичными характеристиками у верховки и тиляпии. Тем не менее в процессе роста длины тела у самцов от года к году значение индекса y_i/x_i в каждой из восьми точек на рисунке 8 увеличивалось: 0.2000; 0.2026; 0.2036; 0.2046; 0.2061; 0.2095; 0.2114; 0.2102. То есть, по отношению к собственной длине тела самцы с возрастом становились более тяжелыми по массе тела. Насколько реальным было такое "утяжеление" самцов оценим по выборкам самцов из второй и седьмой точек, расположенных по порядку увеличения линейных размеров и возраста рыб на линии 3 рисунка 8. Рыбы в этих выборках существенно отличаются по длине, условной массе тела и календарному возрасту. Схема оценки различий представлена в таблице 1, где по столбцам приведены следующие данные.

1. В столбце 2 выписаны значения длины тела (см) шестнадцати самцов щуки трехлетнего возраста по порядку увеличения длины тела рыб в выборке.
2. В столбцах 3 и 4 выписаны значения условной массы тела (см) и значения индекса условная масса тела / длина тела этих самцов.

3. В столбце 5 выписаны значения индекса условная масса тела / длина тела шестнадцати самцов щуки восьмилетнего возраста по порядку увеличения длины тела рыб в выборке.
4. В столбце 6 выписаны прогностические значения условной массы тела у трехлетних самцов щуки, вычисленные по уравнению прямой пропорциональности $y_i = a_i \cdot x_i$ (18), где x_i – значение длины тела из столбца 2, a_i – условно сопряженное значение индекса из столбца 5. Каждое y_i в этом случае символизирует о том, какой могла бы быть условная масса тела у трехлетнего самца щуки, если бы значение индекса условная масса тела / длина тела у этого самца равнялось условно сопряженному значению одноименного индекса восьмилетнего самца. С другой стороны, каждое y_i символизирует и о том, какой могла бы быть условная масса тела у восьмилетнего самца, если бы длина его тела равнялась условно сопряженной длине тела трехлетнего самца. А теперь сходство или различие по измеренной и прогностической условной массе тела и индексу y_i/x_i у самцов в двух выборках оценим при помощи парного критерия Вилкоксона.
5. В столбцах 7-9 повторяются все действия, указаны в §4.13 [25]. При этом последовательность вычисления разностей $\ln y'_i - \ln y_i$ (в столбце 7) по моему глубокому убеждению представляет собой и иллюстрацию того, как следует оценивать сходство или различие (симметричность или асимметричность) в линейных размерах правой и левой частей пластического билатерального признака в выборке исходных данных [11] – подробно этот вопрос рассмотрен ниже. При этом следует обратить внимание на то, что идентичные результаты получаются при вычислении разностей между условно сопряженными прологарифмированными значениями индексов из столбцов 4 и 5, так как $\ln ind_{i,5} - \ln ind_{i,4} = \ln y_{i,6} - \ln y_{i,3}$.

* Подстрочные цифры 3, 4, 5, 6 – номера столбцов.

Итог вычисления парного критерия в рассмотренном примере очевиден, различия достоверны на 1% уровне значимости [25, табл.21П].

В итоге видим, что индексы сопряженных $(x_i; y_i)$ и $(x_{i,\text{собств.}}; y_{i,\text{собств.}})$ величин равны:

$$y_i/x_i = y_{i,\text{собств.}}/x_{i,\text{собств.}}, \quad (19)$$

то есть при переходе от исходных величин к производным геометрическое подобие выдержано в полной мере [20]. При этом связь переменных X и Y в выражениях (13), (14), (17) и в выборках измеренных $(x_i; y_i)$ данных соответствует принятому за основу принципу связи между x_i и y_i при мультиплективном (умножительном или геометрическом) росте животных.

Вернемся теперь назад, к последнему абзацу предыдущего раздела, и графически проиллюстрируем то, как будет выглядеть последовательность отношений между собственной длиной тела и собственными значениями четырех пластических признаков у разных по календарному возрасту самок и самцов пеляди из р. Хулга.

Таблица 1

Оценка различий по условной массе тела и индексу y_i/x_i у самцов щуки в двух выборках при помощи парного критерия Вилкоксона

№ п/п	самцы, 2+лет			самцы, 7+ лет	Условн ая масса тела, см, прогнос т.	разност ь $\ln y'_i - \ln y_i$	ранг и	Ранги разнос- стей со знаком минус
	Длина тела, см	Условная масса тела, см	индекс условная масса тела/ длина тела	условная масса тела/ длина тела				
	x_i	y_i		y'_i				
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	26,90	5,429	0,2018	0,2136	5,746	0,0567	11	
2	27,72	5,583	0,2014	0,2163	5,996	0,0714	14	
3	27,84	5,667	0,2035	0,2123	5,910	0,0420	6	
4	28,16	5,583	0,1983	0,2089	5,883	0,0523	10	
5	28,64	5,809	0,2028	0,2152	6,163	0,0591	12	
6	28,92	5,769	0,1995	0,2101	6,076	0,0518	9	
7	28,97	5,698	0,1967	0,2151	6,231	0,0894	16	
8	29,54	5,963	0,2019	0,2145	6,336	0,0607	13	
9	29,72	5,953	0,2003	0,2104	6,253	0,0492	8	
10	29,78	6,046	0,2030	0,2098	6,248	0,0329	3	
11	29,95	6,145	0,2052	0,2136	6,397	0,0402	5	
12	29,97	6,153	0,2053	0,2123	6,363	0,0336	4	
13	30,92	6,487	0,2098	0,2095	6,478	-0,0014	1	1
14	31,00	6,018	0,1941	0,2101	6,513	0,0790	15	
15	31,34	6,291	0,2007	0,2099	6,578	0,0446	7	
16	31,44	6,596	0,2098	0,2042	6,420	-0,0270	2	2
n=16						сумма рангов со знаком минус 3		

Для этого данные рисунка 4 – приведенные в масштаб длины тела выборочные средние геометрические условные значения признаков Q , C , Π , M и выборочные средние геометрические значения измеренной длины тела l самок пеляди в шести возрастных группах – преобразуем по (14) и (17). В выражении (14) x_i соответствует выборочным $\tilde{l}_{i,1}$ - $\tilde{l}_{i,5}$ самок; в (17) y_i – сопряженные с \tilde{l}_i выборочные преобразованных условных значений признаков: Q , C , Π , M самок; $q'_x=20/x_{max}$, где $x_{max} = \tilde{l}_{i,6}$ самок = 40,98 см, 20 – число разбиений оси OX . Результаты преобразования выборочных значений признаков воспроизведем на рисунке 9.

Переход от метрических к "собственным" размерам выразился в повторении на рисунке 9 картины соотношения выборочных средних геометрических размеров признаков Y с длиной тела рыб на рисунке 4 – в полном соответствии с (19).

Представление исходных данных в таком виде позволяет воспроизвести на одном рисунке системы координат OX и OY не только линии связи размеров нескольких пластических признаков самок, но и линии связи размеров тех же признаков самцов этого вида рыб или аналогичные линии связи признаков X и Y самок и самцов других видов. Привлечем в качестве примера рисунок 9, стартовые модельные отношения выборочных средних геометрических условных значений массы признаков Y и длины тела пятилетних самок пеляди: $\tilde{l}_{i,1}/\tilde{Q}_{i,1} = 4.219$ (20); $\tilde{l}_{i,1}/\tilde{C}_{i,1} = 39.713$ (21); $\tilde{l}_{i,1}/\tilde{\Pi}_{i,1} = 17.722$ (22); $\tilde{l}_{i,1}/\tilde{M}_{i,1} = 45.672$ (23), и выборочные средние геометрические условные значения массы тех же признаков у разных по размерам и календарному возрасту самцов пеляди 4+ - 9+ лет, отловленных вместе с самками в реке Хулга в одно и то же время. Необходимо напомнить, что аналогичные модельные отношения (6) – (9) были использованы ранее для построения рисунка 3.

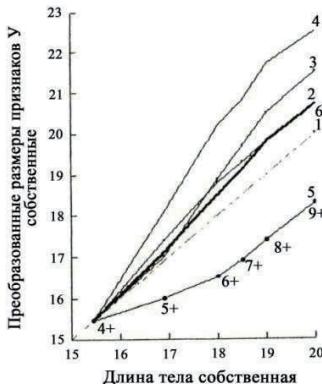


Рис.9. Соотношение между "собственной" длиной и "собственными" размерами четырех признаков у самок пеляди разного возраста из р.Хулга. Обозначения кривых те же, что и на рисунке 4.

Выборочные средние геометрические условные значения массы признаков самцов приведем к масштабу длины тела путем умножения их значений: от $\tilde{Q}_{i,1}$ до $\tilde{Q}_{i,6}$ – на (20); от $\tilde{C}_{i,1}$ до $\tilde{C}_{i,6}$ – на (21); от $\tilde{\Pi}_{i,1}$ до $\tilde{\Pi}_{i,6}$ – на (22); от $\tilde{M}_{i,1}$ до $\tilde{M}_{i,6}$ – на (23) самок. Тем самым выборочные совокупности условных значений массы признаков Q , C , Π , M самцов приведем к масштабу длины тела по модельным отношениям самок пеляди. Затем выраженные в масштабе длины тела значения этих признаков у самцов вместе с $\tilde{l}_{i,1}-\tilde{l}_{i,6}$ преобразуем по соотношениям (14) и (17), где в соотношении $q'_x=20/x_{max}$ величина $x_{max} = \tilde{l}_{i,6}$ самок, после чего окончательные результаты вычислений и линии 2-5 из рисунка 9 нанесем на плоскость рисунка системы прямоугольных координат на рисунке 10.

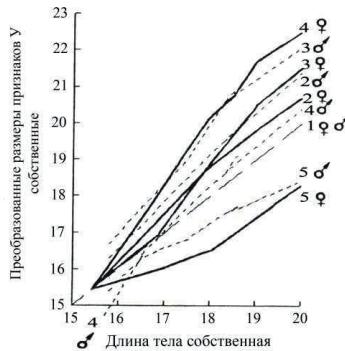


Рис.10. Соотношение между "собственной" длиной и "собственными" размерами четырех признаков у самок и самцов в разных генерациях пеляди из р.Хулга осенью 1972г. Цифровые обозначения кривых те же, что и на рисунках 4 и 9.

Рисунок 10 позволяет увидеть, что во всех шести генерациях самцы несколько тяжелее самок (линия 2, индексы по порядку: 1.029; 1.045; 1.053; 1.062; 1.063; 1.070). Ясно при этом, что различия возникли после завершения нереста и сохраняются до конца весны следующего календарного года; в период летнего нагула и последующей миграции к местам нереста сгладятся или возникнет обратное отношение в результате увеличения (до 20% от общей массы тела) массы половых продуктов самок. По сравнению с самками размеры печени у самцов, в среднем, во всех генерациях рыб меньше (линия 4: 0.937; 0.997; 1.012; 1.016; 1.024; 1.022), а размеры сердца больше (линия 3: 1.058; 1.071; 1.082; 1.122; 1.128; 1.103). У самцов возраста от 5+ до 8+ лет средние значения собственной массы головного мозга выше, чем у самок (линия 5: 0.977; 0.988; 0.959; 0.955; 0.953; 0.921). Понять и обсудить последнее, однако, далеко не так просто [6], как и данные по размерам головного мозга у самок от 6+ до 9+ лет здесь и на рисунках 4 и 9, из-за отсутствия сведений по росту и дифференциальной смертности самок и самцов разных генераций пеляди в предыдущие годы их жизни – до момента отлова в 1972г.

Глава 2. Математическое описание динамики значений разных пластических признаков в онтогенезе животных

2.1. Выбор математического выражения

При работе с цифровыми материалами биологи редко задумываются над тем, как связаны или как должны быть связаны между собой одноименные или разноименные измеренные значения разных пластических морфологических признаков у изучаемых ими животных. Убедительным подтверждением сказанному служит задействованный для обработки первичных данных солидный арсенал математических функций и алгоритмов, где одновременно выполняются четыре основные приема работы с цифрами: сложение, вычитание, умножение, деление [4]. Однаковые по содержанию данные разные исследователи описывают разными математическими соотношениями. Классическим примером служит описание роста во времени длины или массы тела у животных уравнениями параболы, степенной функции, логистической кривой и др. [1,3]. Во всех случаях при этом возникают определенные трудности с интерпретацией членов использованных математических выражений. В итоге естественным образом стал традиционным вопрос о том, какая из математических зависимостей лучше подходит для описания роста животных [1].

Возможен вполне конкретный логический подход к выбору математического выражения. При описании отдельного явления (выборки данных) или процесса соотносительной динамики X и Y принцип связи измеренных значений признаков X и Y в выборках ($x_i; y_i$) должен соответствовать принципу роста самих животных. Тогда в разных математических выражениях и формулах, по которым вычисляют значения параметров использованных для описания роста животных конкретных математических выражений, связь переменных X и Y должна полностью соответствовать связи x_i и y_i в выборках исходных данных.

Выше показано, что в соответствии с концепцией мультипликативного (геометрического) роста животных линейный размер тела (длина тела) и его

«частей» (линейные размеры всех других пластических признаков) у животных в процессе роста изменяются умножительно. Из этого следует, что измеренные значения в выборочных совокупностях разных пластических признаков связаны между собой по принципу произведения их величин. При этом мерой качественной определенности пластического признака в выборочной совокупности его значений является величина среднего геометрического значения, вычисленная по соотношению (1). Складывать или вычитать правомерно только прологарифмированные измеренные значения признаков.

Когда выборочные x_i и y_i измерены в сантиметрах, то следует понимать, что выборочные значения признаков X и Y выражены в однородных и одного масштаба физических единицах измерения линии [7].

В выборках разных по размеру тела рыб и других животных связь между длиной и массой их тела криволинейна и традиционно эмпирически формализуется степенной функцией: $y = B \cdot x^{\alpha}$ (24), где $3 \geq \alpha \geq 3$. Выше показано, что если выборочные значения массы тела, измеренные в граммах, условно выразить в сантиметрах - единицах измерения длины тела, то связь между длиной и условной массой тела у животных в выборке можно описать иным математическим способом, не привлекая выражение (24) и метод наименьших квадратов. Для преобразования выборочных значений массы тела, измеренных в граммах, в условные единицы измерения - сантиметры - требуется извлечь кубический корень из каждого выборочного значения массы тела.

На плоскость рисунка 11 системы прямоугольных координат OX и OY нанесем выборочную совокупность точек $(x_i; y_i)$, где x_i - длина, y_i - условная масса тела двадцати особей щуки, отловленных в 1992 году на Среднем Урале в Нижне - Сысертском водохранилище. Значения x_i и y_i выражены в сантиметрах.

Первоначально для каждой совокупности одноименных выборочных x_i и y_i по соотношению (1) вычислим $\tilde{x}_{i,\text{выб.}} = 34.79$ см - выборочную среднюю геометрическую длину тела, $\tilde{y}_{i,\text{выб.}} = 7.2460$ см - выборочную среднюю геометрическую условную массу тела. Затем для x_i , расположенных слева и

справа от $\tilde{x}_{i,\text{выб}}$, вычислим средние геометрические $\tilde{x}_{i,\text{слева}} = 33.6732$ см и $\tilde{x}_{i,\text{справа}} = 35.9437$ см. Для y_i , сопряженных с $x_{i,\text{слева}}$ и y_i , сопряженных с $x_{i,\text{справа}}$, аналогичным способом вычислим $\tilde{y}_{i,\text{слева}} = 7.0568$ см и $\tilde{y}_{i,\text{справа}} = 7.4405$ см, соответственно. После этого первую ($\tilde{x}_{i,\text{слева}}; \tilde{y}_{i,\text{слева}}$) и вторую ($\tilde{x}_{i,\text{справа}}; \tilde{y}_{i,\text{справа}}$) опорные точки нанесем на плоскость рисунка 11.

Повернем для наглядности рисунок 11 на 90° против хода часовой стрелки. По значениям y_i , расположенным справа ($y_i < \tilde{y}_{i,\text{выб}}$) и слева ($y_i > \tilde{y}_{i,\text{выб}}$) от $\tilde{y}_{i,\text{выб}}$, обозначим эти y_i как $y'_{i,\text{справа}}$ и $y'_{i,\text{слева}}$, вычислим $\tilde{y}'_{i,\text{справа}} = 7.0268$ см и $\tilde{y}'_{i,\text{слева}} = 7.5235$ см. Затем по x_i , сопряженным с $y'_{i,\text{справа}}$ и $y'_{i,\text{слева}}$, вычислим $\tilde{x}'_{i,\text{справа}} = 33.9755$ см и $\tilde{x}'_{i,\text{слева}} = 35.8119$ см. Третью ($\tilde{x}'_{i,\text{справа}}; \tilde{y}'_{i,\text{справа}}$) и четвертую ($\tilde{x}'_{i,\text{слева}}; \tilde{y}'_{i,\text{слева}}$) опорные точки нанесем на рисунок 11.

Вернем рисунок 11 в исходное положение. Отчетливо видно, что опорные точки 1 и 3 расположены на плоскости рисунка системы координат слева от $\tilde{x}_{i,\text{выб}}$ и $\tilde{x}'_{i,\text{справа}} > \tilde{x}_{i,\text{слева}}$, а $\tilde{y}'_{i,\text{справа}} < \tilde{y}_{i,\text{слева}}$. С другой стороны, в опорных точках 2 и 4, расположенных на рисунке справа от $\tilde{x}_{i,\text{выб}}$, $\tilde{x}'_{i,\text{слева}} < \tilde{x}_{i,\text{справа}}$, а $\tilde{y}'_{i,\text{слева}} > \tilde{y}_{i,\text{справа}}$. Вычислим теперь координаты пятой: $\sqrt{\tilde{x}'_{i,\text{справа}} \cdot \tilde{x}_{i,\text{слева}}} = \tilde{x}_{i,\text{слева}}$

$$= 33.824 \text{ см}, \quad \sqrt{\tilde{y}'_{i,\text{справа}} \cdot \tilde{y}_{i,\text{слева}}} = \tilde{y}_{i,\text{слева}} = 7.0418 \text{ см} \text{ и шестой:}$$

$$\sqrt{\tilde{x}'_{i,\text{слева}} \cdot \tilde{x}_{i,\text{справа}}} = \tilde{x}_{i,\text{справа}} = 35.8778 \text{ см}, \quad \sqrt{\tilde{y}'_{i,\text{слева}} \cdot \tilde{y}_{i,\text{справа}}} = \tilde{y}_{i,\text{справа}} = 7.4819$$

см точек, после чего и эти точки нанесем на рисунок 11. Назовем пятую ($\tilde{x}_{i,\text{слева}}; \tilde{y}_{i,\text{слева}}$) и шестую ($\tilde{x}_{i,\text{справа}}; \tilde{y}_{i,\text{справа}}$) точки на рисунке 11 реперными точками.

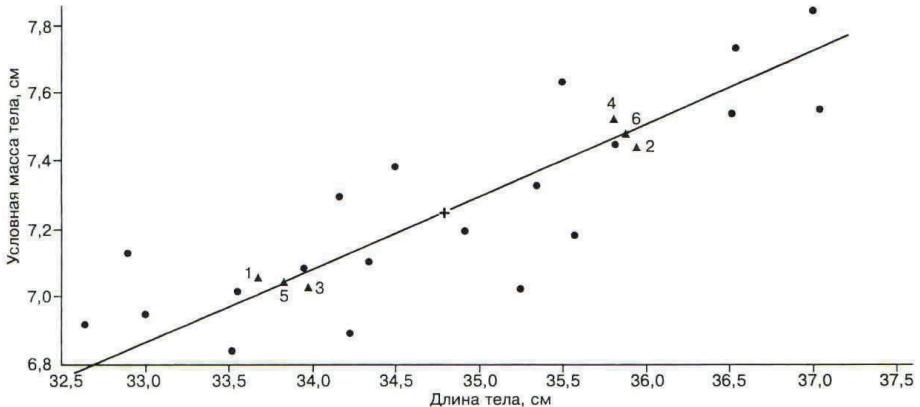


Рис.11. Соотношение между длиной (см) и условной массой тела (см) у четырехлетних щук в выборке из Нижне-Сысертского водохранилища (Средний Урал, 1992г., $n = 20$, оба пола). Линия функциональной связности длины (x_i) и условной массы тела (y_i) - геометрическая прогрессия индексов y_i/x_i .

А теперь для интервала значений x_i от $\tilde{x}_{i,\text{слева}}$ до $\tilde{x}_{i,\text{справа}}$ вычислим значение параметра q_x - знаменателя геометрической прогрессии x_i по выражению:

$$q_{x_n} = \sqrt[n-1]{\tilde{x}_{i,\text{справа}} / \tilde{x}_{i,\text{слева}}} , \quad (25)$$

где n - число членов геометрической прогрессии, после чего становится возможным описать выборочную совокупность x_i на оси OX рисунка 11 геометрической прогрессией от x_1 до x_{20} . Вероятно для расчета q_{x_n} можно выбрать такое n , при котором в последующем описании выборочной совокупности x_i геометрической прогрессией с таким q_{x_n} все $x_{n,i}$ значения членов геометрической прогрессии численно совпадут с x_i .

По (25) с числом членов $n_y = n_x$ аналогичным способом вычислим q_{y_n} геометрической прогрессии y_i для интервала значений y_i от $\tilde{y}_{i,\text{слева}}$ до $\tilde{y}_{i,\text{справа}}$ и выборочную совокупность y_i на оси OY от значения y_1 до y_{20} опишем

геометрической прогрессией с расчетным q_{y_n} . Последовательность описания выборочных x_i и y_i геометрическими прогрессиями одинакова.

Переключим внимание на реперные точки 5 и 6 рисунка 11, координаты которых $(\tilde{x}_{i,\text{слева}}; \tilde{y}_{i,\text{слева}})$ и $(\tilde{x}_{i,\text{справа}}; \tilde{y}_{i,\text{справа}})$, соответственно. Через эти точки проведем линию, представляющую собой среднюю геометрическую прогрессию индексов y_i/x_i выборочной совокупности $(x_i; y_i)$ на плоскости декартовых координат. Знаменатель прогрессии $q_{y_i/x_i} = q_{y_i}/q_{x_i}$, где q_{x_i} и q_{y_i} - расчетные знаменатели геометрических прогрессий, при помощи которых только что математически описаны выборки числовых значений x_i и y_i . При $n = 40$, например, $q_{x_i} = 1.00151$, $q_{y_i} = 1.00155$, $q_{y_i/x_i} = 1.00004$ и точки 5 и 6 на рисунке 11 соединят отрезок прямой линии. Если для других данных имеет место $q_{y_i} > q_{x_i}$, то реперные точки соединят отрезок вогнутой (по отношению к оси OX), а при $q_{y_i} < q_{x_i}$ - отрезок выпуклой линии. В итоге выборочная средняя геометрическая прогрессия y_i/x_i на рисунке 11 формально является линией функциональной связности между длиной и условной массой тела у двадцати особей щуки в выборке, так как данные типа (\mathcal{D}) [1, стр. 106].

А теперь при помощи геометрической прогрессии y_i/x_i опишем математически совместную динамику значений нескольких ($n > 5$) пластических признаков рыб.

2.2. Оценка половых различий по форме тела у рыб на примере самок и самцов речного гольяна.

Воспроизведенный человеческим глазом современный физический облик животных разных видов является продуктом естественного отбора многих поколений животных в менявшихся условиях среды. С середины двадцатого столетия особенности внешнего и внутреннего строения тела животных изучают по значениям индексов - относительным значениям пластических морфологических признаков. Можно утверждать, что индексирование измеренных значений признаков с того времени возведено в ранг основного приема преобразования исходных данных (в ихтиологии, например). В таком

виде данные публикуют (таблицы индексов), накапливают и анализируют [17,26,27,28,29].

Известно, что при росте размеров тела у животных в онтогенезе упорядоченно изменяются величины отношений между линейными промерами разных пластических признаков и линейными промерами длины тела. Аналогично изменяются значения и таких индексов, как масса органов, поделенная на массу тела.

Данное явление известно под названием размерной изменчивости внешнего облика животных [1]. Наличие размерной изменчивости должно было исходно логически привести исследователей к мысли о необходимости разработки и принятия единых правил сбора первичных материалов по пластической морфологии животных - следовало отбирать из природных популяций вида выборки особей, в которых животные должны быть, в среднем, одинаковыми по размерам (длине) тела.

Отсутствие предварительной общей договоренности по данному вопросу в конечном итоге привело к печальному результату: частично или полностью оказались мало пригодными для межпопуляционного сравнения результаты работ нескольких поколений исследователей [29].

Сбор материалов по пластической морфологии рыб и других видов животных, изучение динамики процесса изменения внешнего облика животного в онтогенезе, оценку его своеобразия у животных в разных частях ареала вида необходимо проводить на другой организационной, логической, математической и графической основах. Так, например, результаты измерения некоторого числа пластических признаков ($n \geq 5$), действительно информативных при отражении формы тела самок и самцов данного вида рыб, уже позволяют построить две исходные модели двумерного изометрического виртуального облика - модели ДИВО самок и самцов [13], и две модели динамики формы тела по длине тела.

Модель динамики формы тела по длине тела самок или самцов популяции конкретного вида рыб в математическом выражении есть

геометрическая прогрессия y'_i / x_i , где y'_i , см - форма тела самок или самцов данного вида рыб в масштабе числового значения y_i в исходной модели ДИВО (масштаб длины тела), x_i , см – длина тела особей.

В предлагаемой читателю главе поставлена задача проиллюстрировать последовательность расчета и построения исходной модели формы тела (модели ДИВО) и модели динамики формы тела по длине тела рыб на примере самок речного гольяна (*Phoxinus phoxinus* L.), а также статистическую оценку половых различий по форме тела самок и самцов этого вида рыб, составляющих единую популяцию вида. Для этой цели привлечены линейные промеры четырехсот пятидесяти шести самок и самцов, отловленных, в основном, в июле - сентябре 2004 г. и, частично, в те же месяцы 2005 г. на участке русла верхнего течения реки Утка (Средний Урал, бассейн реки Чусовая), расположенным возле станции Ильмовка Свердловской железной дороги.

Измерение линейных размеров признаков проведено по схеме горизонтальных (параллельных осевой линии тела рыб) и вертикальных (перпендикулярных осевой линии тела) промеров. Выдержанность перпендикулярности при измерении разных пластических признаков и высокая точность линейных промеров, величина которых у разных по длине тела особей гольяна колебалась от 0.3 см до 8.5 см, достигнута благодаря тому, что измерение рыб проведено при помощи специального оптико-механического приспособления, состоящего из двух взаимосвязанных площадок.

Каждая площадка жестко прикреплена к отдельному штангенциркулю. Площадки передвигаются по штангам циркулей в горизонтальной плоскости и, по отношению друг к другу, на разной высоте в перпендикулярных направлениях. На поверхности нижней площадки нанесен отрезок прямой линии в направлении, параллельном движению площадки по штанге циркуля. Перед измерением рыба укладывается правым боком на нижнюю площадку, где ее тело располагается таким образом, чтобы осевая линия тела совпала с отрезком прямой, нанесенным на площадку.

На верхней площадке приспособления жестко прикреплена к штанге циркуля зеркальная фотокамера марки "Зенит 3М". В центре нижней матовой поверхности пентапризмы фотокамеры нанесена черная точка - метка. Таким способом положение метки на поверхности матового стекла совмещено с главной оптической осью системы окуляр фотокамеры - объектив "Гелиос 44". Поэтому черная точка поименована еще и как оптическая метка. При рассмотрении тела рыбы через окуляр фотокамеры, место расположения оптической метки в точке совмещения проекции конца передней части рыла рыбы с отрезком прямой на нижней площадке соответствует отсчету ноль на обоих штангенциркулях. Наведение оптической метки путем передвижения площадок относительно друг друга на точку, расположенную на любом участке левого бока рыбы, позволяет с измерительных шкал штангенциркулей одновременно снять два промера: линейное расстояние по осевой линии от конца рыла до точки на теле рыбы - горизонтальный промер, и линейное расстояние от этой точки до осевой линии, перпендикулярное к осевой линии - вертикальный промер тела.

Для воспроизведения исходной формы тела рыб, а также динамики формы тела по мере роста размеров тела рыбы в длину, использованы измеренные в граммах значения массы тела (Q , g) и десять линейных промеров тела гольянов : 1 - промысловая длина тела, aO - длина рыла, $1C$ - длина головы слева, aV - расстояние до брюшных плавников, отражает линейное расстояние от конца рыла до места на теле гольянов, где значение высоты тела H максимально, aA - расстояние до анального плавника, h - минимальная высота тела на хвостовом стебле, разность промеров ($aA - 1C$) - призвана отразить длину брюшного отдела, разность промеров ($1 - aA$) - призвана отразить длину хвостового стебля взамен традиционно измеряемому значению ($1 - pA$) [28], B - максимальная толщина тела рыбы.

Все линейные промеры выражены в сантиметрах. В целях соблюдения однородности единиц измерения из всех значений массы тела рыб, измеренных в граммах, извлечен кубический корень [7,16]. Кубический корень из массы

любого физического тела (см. 1 главу) есть сторона куба, наполненного дистиллированной водой, масса которого при 20°C и нормальном атмосферном давлении равна массе этого тела. При этом условии длина стороны куба - отрезок прямой линии, является адекватной линейной характеристикой массы и объема любого физического тела [13]. Величина кубического корня из массы тела, измеренной в граммах, поименована как условная масса тела с размерностью сантиметр. Длина тела рыб поименована как признак X, все остальные - признаки Y. Использованные здесь соотношения (27), (28), (29), (30) являются производными геометрической прогрессии, свойства которой полностью соответствуют математическому описанию умножительного (геометрического) роста животных [11,12, 22].

Длина тела отловленных в реке Утка самок гольяна колебалась от 2.5 см до 8.6 см. Весь полученный ряд числовых значений длины тела самок был разделен на одиннадцать классов с размером 0.5 см каждый: 2.51 - 3.00; 3.01 - 3.50;...; 7.51 - 8.00 см, после чего по значениям длины тела 246 самок были сформированы одиннадцать выборок самок численностью от 15 до 29 особей в разных выборках. Для каждой выборки самок были вычислены выборочные средние геометрические значения одиннадцати признаков по соотношению (1).

Выборка самок ($n = 25$) с длиной тела от 3.01 см до 3.50 см - вторая по порядку в ранжированном на размерные классы ряде значений длины тела рыб, выбрана для построения исходной модели формы тела самок гольяна из реки Утка - модели двумерного изометрического виртуального облика (ДИВО) [13]. По каждому из десяти разноименных выборочных средних геометрических значений $\tilde{y}_{i,2}$, где i - порядковый номер признака Y , и значению $\tilde{x}_{i,2} = 3,2516$ см второй выборки $(\tilde{x}_{i,2}; \tilde{y}_{1,2}; \tilde{y}_{2,2}; \tilde{y}_{3,2}; \dots; \tilde{y}_{10,2})$ вычислены десять модельных отношений: $\tilde{x}_{i,2}/\tilde{y}_{1,2}, \tilde{x}_{i,2}/\tilde{y}_{2,2}; \dots; \tilde{x}_{i,2}/\tilde{y}_{10,2}$. При помощи модельных отношений все измеренные $y_{i,k}$ и вычисленные $\tilde{y}_{i,k}$ признаков Y самок из разных выборок переведены в масштаб модели ДИВО по соотношению (2): $y_{i,k} \cdot (\tilde{x}_{i,2} / \tilde{y}_{i,2}) = y'_{i,k}$, где i - номер признака по порядку его представления выше, k - порядковый номер выборки.

После перевода $y_{i,2}$ и $\tilde{y}_{i,2}$ в масштаб модели все $\tilde{y}'_{i,2} = \tilde{x}'_{i,2}$ - это понятно, и, следовательно, равны числовому значению исходной модели формы тела самок $\tilde{F}_{i,2}$, вычисленному по (1): $\tilde{F}_{i,2} = \sqrt[10]{\prod_{i=1}^{10}(\tilde{y}'_{i,2})} = \tilde{x}_{i,2}$. Порядок вычисления $F_{i,k}$ и $\tilde{F}_{i,k}$ и построения точек $(x_{i,k}; F_{i,k})$ и $(\tilde{x}_{i,k}; \tilde{F}_{i,k})$ на плоскости рисунка системы прямоугольных координат OX и OY' впервые проиллюстрирован в работе [13].

Расчет значений параметра q геометрических прогрессий рядов $\tilde{x}_{i,k}, \tilde{y}'_{i,k}; \tilde{F}_{i,k}$ проведен по соотношению (25), где q_i - знаменатель соответствующей геометрической прогрессии. При $n=10$ в соотношении (25): $q(\tilde{x}) = 1.062719$, $q(\tilde{Q}) = 1.068341$, $q(a\tilde{O}) = 1.072547$, $q(l\tilde{C}) = 1.057020$, $q(a\tilde{V}) = 1.060858$, $q(a\tilde{A}) = 1.063399$, $q(aA\tilde{C}) = 1.066596$, $q(l\tilde{A}aA) = 1.061799$, $q(\tilde{H}) = 1.075971$, $q(\tilde{h}) = 1.076098$, $q(\tilde{B}) = 1.074304$, $q(\tilde{F}) = 1.067674$. Заметим, что $q(\tilde{F})$ можно рассчитать и по соотношению (1): $q(\tilde{F}) = \sqrt[10]{\prod_{i=1}^{10}(q_i)}$, где только что представленные q_i вычислены по (25). Полученные q_i призваны выполнить роль видовых констант при описании геометрическими прогрессиями рядов средних значений отдельных признаков Y и формы тела самок гольяна из реки Утка и других рек, где обитают особи этого вида рыб.

Теперь, после вычисления q_i , не составляет труда построить на плоскости рисунка системы прямоугольных координат OX и OY' любую из одиннадцати линий геометрических прогрессий, отражающих динамику средних значений $\tilde{y}_{i,k}$ разных признаков Y или средних значений формы тела по средним значениям длины тела $\tilde{x}_{i,k}$ самок гольяна.

Присвоение разным q_i статуса видовых констант самым естественным образом привело к мысли о необходимости осуществить контроль за тем, как с этими значениями q_i описываются геометрическими прогрессиями ряды исходных данных. Что под этим подразумевается?

Действительно описывающей выборки $(x_{i,k}; y'_{i,k})$ самок гольяна принято считать такую геометрическую прогрессию $\tilde{y}'_{i,2} / \tilde{x}_{i,2}$, когда, после трансформации модельной выборки $(x_{i,2}; y'_{i,2})$ по значениям видовых констант

$q(\tilde{y}'_i)$ и $q(\tilde{x}_i)$ ее знаменателя $q(\tilde{y}'_i / \tilde{x}_i) = q(\tilde{y}'_i)/q(\tilde{x}_i)$ на место расположения $(x_{i,k}; y'_{i,k})$ других выборок исходных данных, оказываются незначимыми по величине разности $(\ln y'_{i,2} - \ln y'_{i,k})$ в парах $(x_{i,2, \text{транс}}; y'_{i,2})$ и $(x_{i,k}; y'_{i,k})$, где

$$x_{i,2, \text{транс}} = x_{i,k}. \quad (26)$$

При этом трансформация модельной выборки $(x_{i,2}; y'_{i,2})$ во всех случаях должна проводиться по единым правилам.

В общих чертах процедура трансформации модельной выборки $(x_{i,2}; y'_{i,2})$ выглядит таким образом. Вначале меньшее по величине $x_{i,2}$ пары $(x_{i,2}; y'_{i,2})$ модельной выборки трансформируется на аналогичное - меньшее по величине значение $x_{i,3}$ пары $(x_{i,3}; y'_{i,3})$ следующей по порядку выборки $(x_{i,3}; y'_{i,3})$. После этого в положение $x_{i,3}$ трансформируется сопряженное с $x_{i,2}$ значение $y'_{i,2}$. Затем в той же последовательности значение $x_{i,3}$ - второе по величине, и сопряженное с ним $y'_{i,3}$ модельной выборки трансформируются на второе по величине $x_{i,4}$ выборки $(x_{i,4}; y'_{i,4})$, и так далее, до $(x_{n,2}; y'_{i,2})$ на $x_{n,3}$.

Понятно, что трансформацию $(x_{i,2}; y'_{i,2})$ на ранжированные по величине $x_{i,k}$ разных выборок $(x_{i,k}; y'_{i,k})$ необходимо проводить на соответствующей математической основе. Пригодными для этой цели оказались математические выражения, производные от геометрической прогрессии.

Если $x_1 < x_2$, то при трансформации x_2 на x_1 первоначально вычисляется:

$$(n-1) = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{\ln q(\tilde{x})}, \quad (27)$$

где $q(\tilde{x})$ - видовая константа, вычисленная по (25). Затем в положение на x_1 трансформируется y'_2 по геометрической прогрессии:

$$(y'_2) / q(\tilde{y}'_i)^{\frac{n-1}{n-1}} = \hat{y}'_2, \quad (28)$$

где $q(\tilde{y}'_i)$ - видовая константа i -го признака, а $(n-1)$ вычислено по (27).

Если $x_1 > x_2$, то при трансформации $(x_2; y'_2)$ на x_1 вычисляются:

$$(n-1) = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{\ln q(\tilde{x})}, \quad (29)$$

$$y'_2 \cdot q(\tilde{y}'_i)^{\frac{n-1}{n-1}} = \hat{y}'_2. \quad (30)$$

Необходимо заметить, что любая величина ($n - 1$) - расстояние между x_1 и x_2 , которое выражено числом шагов в геометрической прогрессии, а не числом единиц метрической или иной системы единиц измерения физических тел.

После трансформации $y'_{i,2}$ на x_i всякий раз возникает ситуация, при которой одному значению x_i соответствуют два значения y'_i : $y'_{i,k}$ и $\hat{y}'_{i,2}$. В итоге, для выборки $x_{i,k}$ мы получаем возможность сформировать выборку разностей $(\ln \hat{y}'_{i,2} - \ln y'_{i,k})$, положительных или отрицательных по знаку, которые ранжируем по величине, после чего при $n \leq 25$ становится возможным оценить сходство или различие между совокупностями $y'_{i,k}$ и $\hat{y}'_{i,2}$ по парному критерию Вилкоксона [25].

Проиллюстрируем сказанное на примере результатов трансформации модельной выборки $(x_{i,2}; F_{i,2})$ самок по геометрическим прогрессиям, в которых в качестве знаменателей прогрессий использованы значения видовых констант $q(\tilde{x}) = 1.062719$ и $q(\tilde{F}) = 1.067674$ - см. выше. Результаты расчета сумм разностей $(\ln \hat{F}_{i,2} - \ln F_{i,k})$, с учетом их знака, полученные после трансформации значений формы тела $F_{i,2}$ самок модельной выборки на $x_{i,k}$ десяти разных выборок $(x_{i,k}; F_{i,k})$, сведены в таблице 2. Знак (+) в таблице означает, что значения $\hat{F}_{i,2}$ модельной выборки самок больше по величине сопряженных значений $F_{i,k}$. Знак (-) отражает обратную картину.

Таблица 2

Суммы рангов (+) и (-) парного критерия Вилкоксона в каждой из десяти выборок $F_{i,k}$ самок

Знак Σ рангов	Суммы рангов разностей ($\ln \hat{F}_{i,2} - \ln F_{i,k}$)										$\Sigma(\Sigma)$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
+	160	165	192	75	76	77	100	140	151	182	1318
-	165	111	108	115	134	133	131	91	125	71	1184
п пар	25	23	24	19	20	20	21	21	22	22	217

Оценка различий между $\hat{F}_{i,2}$ и $F_{i,k}$ при помощи парного критерия Вилкоксона показала на полное их отсутствие во всех десяти парных сравнениях выборок. Полученные результаты, поэтому, позволяют считать соотношение (30), записанное в виде геометрической прогрессии $\hat{F}'_{i,2} = F_{i,2} \cdot q(\tilde{F})^{\frac{n-1}{n}}$ с параметром $q(\tilde{F}) = 1.067674$, исходной (первой) моделью динамики формы тела самок гольяна, обитающих в реке Утка, на всем протяжении размерного ряда длины тела рыб, при которой возможно визуальное определение пола особей.

Длина тела отловленных самцов гольяна, при которой визуально определялся пол особей, колебалась от 2.74 см до 7.83 см. При разноске значений длины тела 184 самцов в ранжированный на размерные классы ряд длины тела самок сформировано восемь выборок самцов численностью от девятнадцати до тридцати особей в разных выборках. Как и для самок, выборочные средние значения всех одиннадцати признаков вычислены по (1). По десяти модельным отношениям $\tilde{x}_{i,2} / \tilde{y}_{i,2}$ признаков *самок гольяна модельной выборки* переведены в масштаб модели ДИВО самок по соотношению (2) все измеренные и выборочные средние значения десяти признаков Y самцов. Отдельные $F_{i,k}$ и выборочные средние $\tilde{F}_{i,k}$ значения формы тела самцов, как и самок, вычислены по (1). Расчет параметров q_i геометрических прогрессий динамики $\tilde{x}_{i,k}, \tilde{y}'_{i,k}, \tilde{F}_{i,k}$ самцов, проведен по соотношению (25). Получены $q(\tilde{x}) = 1.046429, q(\tilde{F}) = 1.050797$.

Сравнение значений параметра $q(\tilde{F}/\tilde{x}) = q(\tilde{F}) / q(\tilde{x}) = 1.0047$ геометрической прогрессии $\tilde{F}_{i,2} / \tilde{x}_{i,2}$ -первой модели динамики формы тела по длине тела самок, и $q(\tilde{F}/\tilde{x}) = 1.0042$ геометрической прогрессии $\tilde{F}_{i,k} / \tilde{x}_{i,k}$ самцов гольяна показало, что эти два значения $q(\tilde{F}/\tilde{x})$ практически совпали по величине!

По значениям параметров $q(\tilde{x}) = 1.062719$ и $q(\tilde{F}) = 1.067674$ самок (см. константы) проведена трансформация $(x_{i,2}; F_{i,2})$ самок модельной выборки на место расположения всех $(x_{i,k}; F_{i,k})$ самцов разных выборок по соотношениям:

(27), (28), (29), (30). Результаты оценки итогов совмещения выборок по x_i помещены в таблице 3.

Таблица 3

Суммы рангов (+) и (-) парного критерия Вилкоксона в каждой из восьми выборок $F_{i,k}$ самцов

Знак \sum рангов	Суммы рангов разностей ($\ln\hat{F}_{i,2} - \ln F_{i,k}$)								$\Sigma(\Sigma)$
	1	2	3	4	5	6	7	8	
+	160	100	149	163	73	67	103	115	930
-	165	90	176	162	137	143	160	116	1149
п пар	25	19	25	25	20	20	22	21	177

Видно, что во всех выборках самцов различия между сопряженными ($\ln\hat{F}_{i,2} - \ln F_{i,k}$) отсутствуют, как и в таблице 2. Это означает, что после двух трансформаций модельной выборки ($x_{i,2}; F_{i,2}$) самок - на $x_{i,k}$ самок и $x_{i,k}$ самцов, по значениям $q(\tilde{x})$ и $q(\tilde{F})$ – параметрам первой модели динамики формы тела по длине тела самок, получен результат, согласно которому в реке Утка одинаковые по длине тела самки и самцы гольяна не отличаются между собой по форме тела. То есть, по мере роста рыб в длину форма тела самок и самцов изменялась в одном направлении практически однозначно. Подтверждает сказанное рисунок 12, где на плоскости системы прямоугольных координат ОХ и ОY' нанесены: линия модели ДИВО самок модельной выборки - линия 1, и точки ($\tilde{x}_{i,k}, \tilde{F}_{i,k}$) разных выборок самок и самцов.

Таким образом, если использованная в данной работе совокупность пластических морфологических признаков действительно характеризует форму тела гольяна, то без каких-либо других суждений правомерно прийти к выводу о том, что у одинаковых по длине тела самок и самцов гольяна, обитающих в условиях реки Утка, близки по величине или идентичны интегральные значения формы тела.

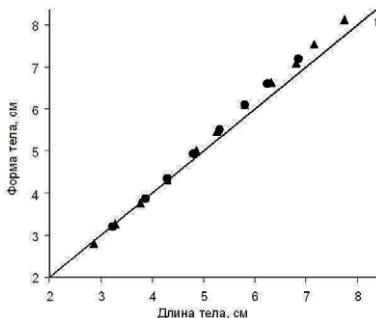


Рис.12. Динамика формы тела по длине самок (▲) и самцов (●) гольяна из реки Утка. Геометрические средние значения формы тела самок и самцов в выборках представлены в масштабе значений признаков Y в исходной модели формы тела самок (см. текст). 1 - линия модели ДИВО самок гольяна.

Серьезное сомнение в правильности такого толкования данных таблицы 3 и рисунка 12 - по видимому результату, возникло после проведения попарного сравнения выборочных совокупностей ($x_{i,k}; y'_{i,k}$) разных признаков Y самок и самцов. Напомним, что $y'_{i,k}$ - выборочное значение конкретного (i) признака Y в масштабе модели ДИВО. Символ (k) - порядковый номер выборки ($x_{i,k}; y'_{i,k}$). Так вот, после оценки различий тем же способом - совмещением по $x_{i,k}$ разных выборок ($x_{i,k}; y'_{i,k}$) самок и самцов, отдельно по каждому из десяти признаков Y, в выборках на интервале значений длины тела от 5.51 см до 7.00 см получен результат, согласно которому выявлены достоверные различия по шести пластическим признакам Y: aV, aA, H, h, (aA - 1C), (1 - aA) (парный критерий Вилкоксона, 1% уровень значимости).

Так естественно возникла необходимость создать другую модель динамики формы тела, то есть такую модель, при помощи которой, вероятно, станет возможно выявлять различия по форме тела у рыб разного пола при наличии достоверных различий по некоторым отдельным признакам. Решению этой задачи помогли результаты анализа нескольких вариантов динамики

значений $(\tilde{x}_{i,k}; \tilde{F}_{i,k})$ с разными сочетаниями признаков Y у самок и самцов в каждом варианте, из которых здесь рассмотрим два варианта.

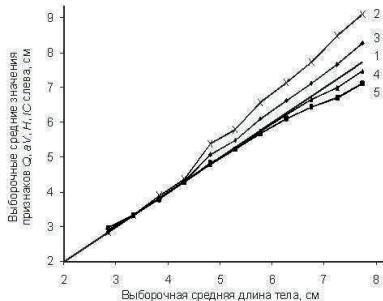


Рис.13. Динамика выборочных средних геометрических значений признаков Y по длине самок гольяна: $(\tilde{l}_{i,k}; \tilde{H}'_{i,k})$ - линия 2, $(\tilde{l}_{i,k}; \tilde{Q}'_{i,k})$ - линия 3, $(\tilde{l}_{i,k}; a\tilde{V}'_{i,k})$ - линия 4, $(\tilde{l}_{i,k}; l\tilde{C}'_{i,k})$ - линия 5. 1 - линия модели ДИВО самок гольяна.

На рисунке 13, в масштабе модели ДИВО самок гольяна, представлена динамика выборочных средних значений признаков Q, aV, H, IC самок гольяна по выборочным средним значениям длины тела (признак X). Линия 1 модели ДИВО проведена через начало координат и точку $(\tilde{x}_{i,2}; \tilde{F}_{i,2})$ модельной выборки самок. Видно, что по отношению к линии 1, где $q(\tilde{y}'_{i,k})/q(\tilde{x}) = 1$, $q(\tilde{x}) = 1.062719$ (см. константы), линия 2 - отражает динамику $\tilde{H}'_{i,k}/\tilde{x}_{i,k}$, и линия 3 - динамику $\tilde{Q}'_{i,k}/\tilde{x}_{i,k}$, расположены выше, в то время как линия 4 – динамики $a\tilde{V}'_{i,k}/\tilde{x}_{i,k}$, и линия 5 – динамики $l\tilde{C}'_{i,k}/\tilde{x}_{i,k}$, расположены ниже линии 1. Вычисленное по (1) и значениям констант среднее геометрическое четырех $q(\tilde{y}'_{i,k})$ этих признаков равно $\sqrt[4]{\prod_{i=1}^4 q(\tilde{y}'_{i,k})} = q(F^4) = 1.065523$, а поделенное на $q(\tilde{x})$ – равно 1.00264. Это означает, что линия динамики формы тела $F_{i,k}^4$ по длине тела (на рис. 13 не проведена) расположена выше линии 1. Комбинация из четырех значений $q(\tilde{y}'_{i,k})$ признаков Q, aA, (1 - aA), IC самок приводит к величине $q(F^4) = 1.062632$, после деления которой на $q(\tilde{x})$ получаем величину 0.999992 = 1. Очевидна возможность подбора и такой комбинации $q(\tilde{y}'_{i,k})$

признаков Y , для которых $q(F'')/ q(\tilde{x}) < 1$. Все сказанное свидетельствует о том, что окончательная величина $q(F'')/ q(\tilde{x})$ геометрической прогрессии динамики формы тела по длине тела самок или самцов в конечном итоге зависит от направления динамики $\tilde{y}'_{i,k}/ \tilde{x}_{i,k}$ разных признаков Y по отношению к линии модели ДИВО. Но, если отклонение частных линий динамики $\tilde{y}'_{i,k}/ \tilde{x}_{i,k}$ и интегральной линии динамики $\tilde{F}_{i,k} / \tilde{x}_{i,k}$ от линии модели ДИВО - суть отражаемого на рисунке плоскости OX и OY' процесса динамики формы тела по длине тела, то представление разных по направленности линий динамики $\tilde{y}'_{i,k}/ \tilde{x}_{i,k}$ признаков Y в величинах, соответствующих одному направлению их динамики по отношению к линии модели ДИВО, позволит исключить нивелирование величины интегральной оценки $q(F'')/ q(\tilde{x})$ разными по направленности линиями динамики $\tilde{y}'_{i,k}/ \tilde{x}_{i,k}$.

Поэтому для создания другой модели динамики формы тела по длине тела самок гольяна - второй модели, принято условие, согласно которому все $q(\tilde{y}'_{i,k})$ геометрических прогрессий динамики $\tilde{y}'_{i,k}$ признаков Y по величине должны быть больше $q(\tilde{x})$, то есть все без исключения линии связи $\tilde{y}'_{i,k}/ \tilde{x}_{i,k}$ на рисунке плоскости OX и OY' должны быть расположены выше линии модели ДИВО. Обратившись к видовым константам самок, видим, что $q(\tilde{y}'_{i,k})$ признаков 1С, аV, (1 - аA) самок меньше значения $q(\tilde{x})$. Для выполнения принятого условия значения $q(\tilde{y}'_{i,k})$ этих признаков преобразуем по соотношению:

$$q(\tilde{x})^2 / q(\tilde{y}'_{i,k}) = q(\tilde{y}''_{i,k}), \quad (31)$$

где $q(\tilde{y}''_{i,k}) > q(\tilde{x})$ во столько раз, во сколько $q(\tilde{y}'_{i,k}) < q(\tilde{x})$.

Соответственно, для переноса точек $(x_{i,k}; y'_{i,k})$ и $(\tilde{x}_{i,k}; \tilde{y}'_{i,k})$ этих признаков на рисунке системы OX и OY' из нижнего положения в верхнее по отношению к линии модели ДИВО, значения всех $y'_{i,k}$ и $\tilde{y}'_{i,k}$ преобразуем по соотношению:

$$x_{i,k}^2 / y'_{i,k} = y''_{i,k}. \quad (32)$$

Наконец, по семи исходным $q(\tilde{y}'_{i,k})$ и трем преобразованным $q(\tilde{y}''_{i,k})$ вычислим по (1) знаменатель $q(\tilde{F}')$ геометрической прогрессии другой (второй) модели динамики формы тела самок гольяна: $q(\tilde{F}') = 1.069382$.

Теперь выпишем значения $q(\tilde{x})$, $q(\tilde{y}'_{i,k})$, $q(\tilde{F})$ самцов гольяна, вычисленные по (25). Здесь величина $q(\tilde{x})$ вычислена по ряду чисел, состоящему из восьми выборочных средних $\tilde{x}_{i,k}$ самцов, а десять значений $q(\tilde{y}'_{i,k})$ вычислены по десяти рядам $\tilde{y}'_{i,k}$ самцов - после перевода в масштаб модели ДИВО самок измеренных значений $y_{i,k}$ и $\tilde{y}_{i,k}$ десяти признаков Y самцов по модельным отношениям $\tilde{x}_{i,2}/\tilde{y}_{i,2}$ самок модельной выборки. Как и для самок, в соотношении (25) $n = 10$: $q(\tilde{X}) = 1.046429$, $q(\tilde{Q}) = 1.051941$, $q(a\tilde{O}) = 1.053140$, $q(l\tilde{C}) = 1.041834$, $q(a\tilde{V}) = 1.041805$, $q(a\tilde{A}) = 1.044219$, $q(aA \approx 1C) = 1.045539$, $q(l \approx aA) = 1.049957$, $q(\tilde{H}) = 1.061090$, $q(\tilde{h}) = 1.061710$, $q(\tilde{B}) = 1.056960$, $q(\tilde{F}) = 1.050797$. Видно, что числовые значения $q(\tilde{y}'_{i,k})$ признаков 1C, aV, aA, (aA - 1C) меньше $q(\tilde{x}_i)$. Поэтому все $y'_{i,k}$ и $\tilde{y}'_{i,k}$ этих признаков преобразуем по (32) в $y''_{i,k}$ и $\tilde{y}''_{i,k}$, после чего для каждой из восьми выборок самцов по соотношению (1) вычислим значения $F'_{i,k}$ и $\tilde{F}'_{i,k}$ по $y'_{i,k}$, $y''_{i,k}$, $\tilde{y}'_{i,k}$, $\tilde{y}''_{i,k}$. Точки $(\tilde{x}_{i,k}; \tilde{F}'_{i,k})$ второго варианта моделирования динамики формы тела по длине тела самок и самцов гольяна нанесем на плоскость рисунка 14 системы координат OX и $OY^{\textcolor{blue}{t}}$. Теперь на участке длины тела рыб от пяти до семи сантиметров точки $(\tilde{x}_{i,k}; \tilde{F}'_{i,k})$ самцов расположены выше аналогичных точек самок.

Оценим информативность второй модели динамики формы тела по длине тела самок. Для этого проведем трансформацию значений $x_{i,2}$ и $F'_{i,2}$ точек $(x_{i,2}; F'_{i,2})$ исходной модельной выборки самок по (27), (28), (29), (30) на место расположения $x_{i,k}$ разных выборок самцов на оси OX рисунка 14 по геометрическим прогрессиям с $q(\tilde{X}) = 1.062719$ - видовая константа, и $q(\tilde{F}') = 1.069382$ - значение знаменателя прогрессии второй модели динамики формы тела самок гольяна. Результаты трансформации приведены в таблице 4.

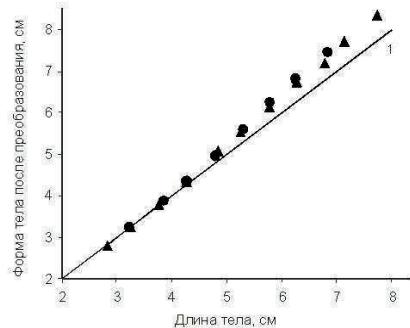


Рис.14. Динамика преобразованных выборочных средних геометрических значений форм тела самок (▲) и самцов (●) гольяна из реки Утка. 1-линия модели ДИВО самок гольяна.

Видно отчетливо, что $F'_{i,k}$ самцов в пятой, шестой, седьмой и восьмой выборках больше значений $\hat{F}'_{i,2}$ самок. В шестой и седьмой выборках различия достоверны на 1% уровне значимости. Для уточнения результатов, помещенных в табл. 4, отдельно выполнена оценка сходства или различия по форме тела самок и самцов в пятых и восьмых выборках. После трансформации выборочных $F'_{i,5}$ и $F'_{i,8}$ самок на $x_{i,5}$ и $x_{i,8}$ самцов тем же способом - по (27), (28), (29), (30), где $q(\tilde{X}) = 1.062719$, $q(\tilde{F}') = 1.069382$, и вычисления разностей ($\ln \hat{F}'_{i,5}$ самок - $\ln F'_{i,5}$ самцов) и ($\ln \hat{F}'_{i,8}$ самок - $\ln F'_{i,8}$ самцов) проявились достоверные различия между $\hat{F}'_{i,8}$ самок и $F'_{i,8}$ самцов.

Таблица 4

Суммы рангов (+) и (-) парного критерия Вилкоксона в каждой из восьми выборок $F_{i,k}$ самцов

Знак \sum рангов	Суммы рангов разностей ($\ln \hat{F}_{i,2} - \ln F_{i,k}$)								$\Sigma(\Sigma)$
	1	2	3	4	5	6	7	8	
+	109	103	191	143	70	25	42	66	749
-	216	87	134	182	140	185	207	165	1316
пар	25	19	25	25	20	20	22	21	177

Таким образом, если всем рядам значений $y'_{i,k}$ признаком Y, призванным характеризовать форму тела рыб при разных $x_{i,k}$, придать одно направление динамики по отношению к линии модели ДИВО, в данном случае - положительное, то можно не только видеть на рисунке 14, но и утверждать, что на интервале длины тела от 5.5 см до 7.00 см и больше форма тела самцов изменяется иначе, чем изменяется форма тела самок. Это, в свою очередь, приводит к мысли о том, что на данном отрезке онтогенеза рыб разного пола - репродуктивном периоде жизни рыб, проявляются и реализуются два направления формообразования, приводящие, вероятно, к выравниванию гидродинамических характеристик тела самок и самцов: лобовое сопротивление, обтекаемость [30] и, тем самым, к снижению энергетических затрат при обитании рыб в условиях направленного движения среды обитания - течения воды в русле реки.

Подведем краткий итог сказанному выше. Представлены тридцать два математических соотношения, восемь из которых составляют математическую основу метода оценки половых различий самок и самцов популяции речного гольяна. Логической основой метода являются: исходная виртуальная модель тела рыб (модель ДИВО) - фигура равностороннего многоугольника [13], и представление о взаимосвязанном умножительном изменении линейных размеров всех пластических признаков в процессе геометрического роста размеров тела животных [11, 12, 22], которое описывается геометрической прогрессией.

Логическая и математическая основы позволили вслед за первой создать вторую модель динамики формы тела по длине тела самок гольяна, при помощи которой стало возможным напрямую - способом трансформации модельной выборки $(x_{i,2}; F'_{i,2})$ самок, провести оценку сходства или различия по форме тела самок и самцов популяции особей речного гольяна реки Утка.

Трансформация модельной выборки значений длины и формы тела самок гольяна по размерному ряду длины тела с $q(\tilde{x}) = 1.062719$ и значению $q(\tilde{F}') = 1.069382$ геометрической прогрессии – второй модели динамики формы тела по

длине тела самок - методический прием, позволяющий оценивать не только сходство или различие по форме тела самок и самцов популяции реки Утка, но и самок из разных популяций относительно самок популяции реки Утка. Для этого из разных популяций особей вида достаточно отловить всего по одной выборке наиболее крупных половозрелых самок численностью 25-30 особей в выборке. Если возникнет необходимость сравнить форму тела самцов из разных популяций, то, как и в случае с самками, необходимо построить модель ДИВО по модельной выборке самцов из той же, что и самки, популяции и, аналогично - по материалам измерения самцов всех размеров тела, которые встречены при отлове, рассчитать параметры $q(\tilde{x})$, $q(\tilde{y}'_{i,k})$, $q(\tilde{F})$ геометрических прогрессий первой и второй моделей динамики формы тела по длине тела самцов.

Параметры исходной модели ДИВО и моделей динамики формы тела по длине тела самок гольяна вычислены впервые в работе [8]. Поэтому за популяцией особей речного гольяна из реки Утка на данном этапе исследования условно закрепляется статус исходной популяции вида, по значениям параметров моделей динамики формы тела самок и самцов которой должно проводиться сравнение формы тела самок и самцов всех других популяций этого вида рыб. Тем самым, ряды измеренных значений линейных промеров одиннадцати пластических признаков модельных выборок самок и самцов гольяна р. Утка, исходные модельные отношения признаков - $\tilde{x}_{i,2}/\tilde{y}_{i,2}$, видовые константы: $q(\tilde{x})$, $q(\tilde{y}'_{i,k})$, $q(\tilde{y}''_{i,k})$, $q(\tilde{F})$, $q(\tilde{F}')$ геометрических прогрессий первой и второй моделей динамики формы тела по длине тела самок и самцов, могут быть использованы для создания исходного банка данных.

Глава 3. Использование математических моделей в анализе процессов роста животных

3.1. Информативность второй математической модели динамики формы тела гольянов

В предыдущей главе динамика формы тела рыб- совместная динамика значений десяти пластических признаков самок и самцов речного гольяна из популяции вида, обитающей в р. Утка, была описана математически с помощью геометрической прогрессии (ГП). Величина знаменателя геометрической прогрессии – второй математической модели динамики формы тела самок речного гольяна, вычислена по выборочным средним геометрическим значениям формы тела в одиннадцати размерных классах длины тела самок (табл. 5). Аналогичное значение знаменателя геометрической прогрессии – второй математической модели динамики формы тела самцов, вычислено по выборочным средним геометрическим значениям формы тела в девяти размерных классах длины тела самцов (табл. 6).

При обращении к наиболее известным классификациям информативности разных исходных данных, используемых для описания роста животных [1, стр. 104-106], видим, что данные в таблицах 5 и 6 в полной мере соответствуют только данным типа (D), так как они сформированы путем ранжирования на классы совокупности значений длины тела самок в выборке, состоящей из двухсот сорока шести особей, и самцов в выборке, состоящей из двухсот десяти особей, отловленных, в основном, в июле – августе 2004г. и частично – на том же отрезке времени года в 2005г.

Согласно представлению исследователей середины и второй половины двадцатого века такие исходные данные, как данные в таблицах 5 и 6, имеют крайне низкую информативную ценность для того, чтобы с их помощью отражать рост гольянов в конкретной популяции вида. Но при этом суждение о том, что эти данные так же мало пригодны для иллюстрации динамики размеров отдельных пластических признаков или формы тела в онтогенезе рыб и других животных разных видов, в литературных источниках не встречено.

Поэтому, для воспроизведения естественной динамики формы тела самок и самцов гольяна по мере роста размеров их тела, данные таблиц 5 и 6 в этой главе использованы в полной мере, так же как и вторые математические модели динамики формы тела самок и самцов, параметры которых вычислены в предыдущей главе по данным из этих таблиц.

Проверка на пригодность второй математической модели самок адекватно отражать динамику формы тела гольянов при их росте в среде обитания проведена по результатам шести трансформаций модельной выборки ($l_{i,2}; F'_{i,2}$) самок по второй модели самок, где $F'_{i,2}$ вычислены по исходным данным модельной выборки ($l_{i,2}; y_{1,2}; y_{2,2}; y_{3,2}; \dots; y_{10,2}$), помещенной в таблице 1П приложения, после предварительного преобразования измеренных значений признаков: 2, 3, 6, 7, 9, 10, 11 из этой таблицы по соотношению (2) – приведения в масштаб длины тела, а значений признаков: 4, 5, 8 – по (2) и (32) – приведения в масштаб длины тела и вычисления обратных значений признаков.

Пять трансформаций модельной выборки ($l_{i,2}; F'_{i,2}$) самцов гольяна по второй модели самцов выполнены после аналогичной процедуры вычисления $F'_{i,2}$ по исходным данным модельной выборки самцов, которая помещена в таблице 2П приложения, для чего было необходимо предварительно, как это выполнено для самок, преобразовать по (2) измеренные значения признаков: 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, а измеренные значения признаков: 4, 5, 6 – по (2) и (32).

В качестве модели динамики длины тела самок гольяна использована геометрическая прогрессия:

$$l_{i,k} = l_{i,2} \cdot 1.062719^{\frac{(n-1)}{n}}. \quad (33)$$

Описание динамики формы тела самок модельной выборки выполнено по второй математической модели (см. табл. 5) – геометрической прогрессии:

$$\widehat{F}'_{i,2} = F'_{i,2} \cdot 1.069382^{\frac{(n-1)}{n}}. \quad (34)$$

Значение знаменателя $q(l_i)$ геометрической прогрессии:

$$l_{i,k} = l_{i,2} \cdot 1.05552^{\frac{(n-1)}{n}} \quad (35)$$

Таблица 5

Расчет значений $q_i \Gamma$ различных признаков и формы тела по ранжированным сопряжённым рядам выборочных средних геометрических значений одиннадцати признаков самок гольяна объединённой выборки ($n = 246$).

N выбо- рки п.п.	Признаки, см											Π особей					
	$\tilde{1}^*$	$\tilde{2}$	$\tilde{3}'$	$\tilde{4}'$	$\tilde{5}'$	$\tilde{6}'$	$\tilde{7}'$	$\tilde{8}'$	$\tilde{9}'$	$\tilde{10}'$	$\tilde{11}'$	$\tilde{F}_{10, k}^*$	$\tilde{5}''$	$\tilde{8}''$	$\tilde{F}_{10, k}^{**}$		
1	2.8405	2.7677	2.9241	2.8870	2.8332	2.8350	2.8068	2.8524	2.7577	2.6996	2.7767	2.8126	2.7946	2.8477	2.8286	2.8026	29
2	3.2516	3.2516	3.2516	3.2516	3.2516	3.2516	3.2516	3.2516	3.2516	3.2516	3.2516	3.2516	3.2516	3.2516	3.2516	3.2516	25
3	3.7629	3.7235	3.8023	3.1291	3.7064	3.7558	3.7721	3.7789	3.8069	3.7183	3.9360	3.7724	3.7971	3.8203	3.7471	3.7875	23
4	4.2678	4.2281	4.4570	4.2062	4.2134	4.2822	4.3260	4.2485	4.3055	4.3052	4.5518	4.3111	4.3032	4.3228	4.2871	4.3587	28
5	4.8424	4.9940	5.1832	4.7553	4.7108	4.8686	4.9349	4.8004	5.3058	5.2579	5.4874	5.0237	4.9310	4.9777	4.8848	5.0786	19
6	5.2463	5.4068	5.9162	5.1548	5.1483	5.3077	5.3960	5.1476	5.7254	5.6816	5.5903	5.4755	5.3394	5.3462	5.3469	5.3166	20
7	5.7842	6.0183	6.7193	5.6086	5.6695	5.8524	5.9239	5.7380	6.5063	6.2473	6.7584	6.0908	5.9653	5.9012	5.8308	6.1630	21
8	6.2857	6.5512	7.1408	6.6291	6.1616	6.3564	6.5439	6.1695	7.0852	7.0264	7.797	6.6289	6.5532	6.4123	6.4041	6.7362	22
9	6.7819	7.0423	7.6637	6.3766	6.5977	6.7697	6.9927	6.8107	7.6722	7.3653	7.8708	7.1001	7.2130	6.9712	6.7532	7.2218	21
10	7.1458	7.5780	7.7579	6.5265	6.9092	7.1910	7.5109	7.0768	8.4207	8.1887	8.7308	7.5453	7.0758	7.3905	7.2154	7.7267	23
11	7.7316	8.2044	8.3434	7.6400	7.3967	7.7428	8.1405	7.7208	9.0336	8.8273	9.1678	8.1342	8.4911	8.0817	7.7424	8.3642	15
\tilde{X}_1^{**}	5.0228	5.1392	5.4159	4.8671	4.9223	5.0436	5.1370	4.9967	5.4264	5.3274	5.5692	5.1796	5.1834	5.1254	5.0490	5.2389	
R_1^{***}	3.7261	3.7149	3.8402	3.7072	3.6831	3.7298	3.7433	3.7225	3.7879	3.7472	3.8853	3.7557	3.7451	3.7696	3.7297	3.6900	
R_2^{**}	6.4420	6.7351	7.2128	6.1065	6.2680	6.4856	6.6873	6.3858	7.3216	7.1426	7.5179	6.7707	6.7959	6.6208	6.4986	6.8932	
q_i	1.0627	1.0683	1.0725	1.0570	1.0609	1.0634	1.0666	1.0618	1.0761	1.0760	1.0743	1.0677	1.0684	1.0646	1.0636	1.0694	

Примечание: цифровые обозначения пластических признаков самок в данной таблице такие же, как у признаков самок в табл. III приложения; символ " – обратные значения признаков вычислены по (32); $\tilde{F}_{10, k}^*$ – средние геометрические значения форм тела для вычисления признаков; $\tilde{F}_{10, k}^{**}$ – средние геометрические значения форм тела для вычисления признаков из каждого отдельного класса длины тела (в масштабе длины тела); ** – среднее геометрическое значение правой части всего ряда чисел; *** – среднее геометрическое значение левой части всего ряда чисел; **** – среднее геометрическое значение правой части всего ряда чисел; значение $q_i \Gamma$ разных признаков вычислены по (25) с $n=10$.

Таблица 6

Расчет значений знаменателей q_i , ГП разных признаков и формы тела по ранжированным сопряжённым рядам выборочных средних геометрических значений одиннадцати признаков самцов гольяна объединённой выборки ($n = 210$).

N выборки п.п.	Признаки, см										n особей						
	$\tilde{1}^*$	$\tilde{2}^*$	$\tilde{3}^*$	$\tilde{4}^*$	$\tilde{5}^*$	$\tilde{6}^*$	$\tilde{7}^*$	$\tilde{8}^*$	$\tilde{9}^*$	$\tilde{10}^*$							
1	2.8816	2.8380	2.9659	2.8956	2.8860	2.8745	2.8631	2.8938	2.7598	2.7743	2.7932	2.8538	2.8677	2.8772	2.8887	2.8515	7
2	3.2346	3.2346	3.2346	3.2346	3.2346	3.2346	3.2346	3.2346	3.2346	3.2346	3.2346	3.2346	3.2346	3.2346	3.2346	3.2346	26
3	3.8516	3.8629	3.9386	3.8052	3.8781	3.8068	3.9214	3.8970	3.9148	3.9185	3.9521	3.8874	3.8986	3.8253	3.8244	3.8860	19
4	4.2589	4.3206	4.6050	4.2541	4.2398	4.3130	4.3461	4.1701	4.4274	4.4121	4.4714	4.3543	4.2637	4.2781	4.2055	4.3482	27
5	4.7526	4.9323	5.0276	4.6838	4.6745	4.7737	4.8262	4.7173	5.1549	5.0627	5.3139	4.9124	4.8224	4.8320	4.7316	4.9387	27
6	5.2389	5.5348	5.6542	5.1258	5.1519	5.2395	5.5041	5.2392	5.9028	5.9377	6.0985	5.5084	5.3545	5.3274	5.2383	5.5509	27
7	5.7698	6.1503	6.2641	5.1018	5.5884	5.6882	5.7911	5.9073	6.8630	6.5967	6.8545	6.1027	6.0410	5.9571	5.8526	6.2161	27
8	6.2382	6.6716	6.8896	5.8814	5.9103	6.1285	6.2704	6.4221	7.4599	7.1075	7.5279	6.6023	6.6166	6.5843	6.3499	6.7771	27
9	6.8235	7.3166	7.5714	6.3621	6.4578	6.6949	6.8874	7.0375	8.2292	7.8650	8.1995	7.2331	7.3184	7.2099	6.9546	7.4446	23
\tilde{X}_i^{**}	4.6070	4.7605	4.8959	4.4960	4.5206	4.5921	4.6470	4.6314	5.0086	4.9298	5.0638	4.7505	4.7208	4.6950	4.6219	4.7950	
R_1^{***}	3.5164	3.5182	3.6319	3.5090	3.5198	3.5516	3.5444	3.4914	3.5269	3.5293	3.5547	3.5355	3.5238	3.5130	3.5013	3.5333	
R_2^{****}	5.7185	6.0634	6.2172	5.4819	5.5225	5.6656	5.7712	5.8061	6.6310	6.4409	6.7207	6.0169	5.9653	5.9215	5.7719	6.1217	
q_i	1.0555	1.0623	1.0615	1.0508	1.0513	1.0539	1.0557	1.0581	1.0727	1.0691	1.0733	1.0609	1.0602	1.0597	1.0571	1.0630	

Примечание: цифровые, буквенные обозначения и символы ' разных пластических признаков самцов в данной таблице такие же, как у однотипных признаков в табл. 5 и табл. 11

– модели динамики длины тела самцов гольяна, вычислено по ранжированному ряду выборочных средних геометрических значений длины тела самцов в таблице 6.

Для описания динамики формы тела самцов использована здесь вторая модель (см. табл. 6) – геометрическая прогрессия:

$$\hat{F}'_{i,2} = F'_{i,2} \cdot \mathbf{1.06297}^{\overbrace{(n-1)}}. \quad (36)$$

На отрезке времени с 2006г. по 2011г., в августе каждого года, на одном и том же участке русла верхнего течения реки Утка были отловлены шесть выборок самок и пять выборок самцов гольяна (по 25 особей в выборке). Длина тела самок в выборках в разные годы колебалась от 4.29 см. до 8.27 см., самцов – от 4.21 см. до 7.81 см. Район проведения отлова рыб указан в главе 1.

Трансформация модельных выборок ($l_{i,2}; F'_{i,2}$) самок и самцов проводилась путем совмещения ранжированных по величине модельных и измеренных значений длины тела ($l_{i,2}$ и $l_{i,k}$) в каждой из шести отдельно взятых выборок самок и пяти отдельно взятых выборок самцов.

После "приведения к длине тела" измеренных значений признаков Y и вычисления $F'_{i,k}$, ранжированные по l_i ряды ($l_{i,2}; F'_{i,2}$) и ($l_{i,k}; F'_{i,k}$) разных отдельно взятых выборок рыб выстраивались параллельно друг другу, после чего для каждой пары сопряженных $l_{i,2}$ и $l_{i,k}$ самок и самцов по (33) и (35) или по (27) и (29) вычислялось, соответственно полу-, значение $\overbrace{(n-1)}$. Затем по ГП (34) и ГП (36), соответственно, вычислялось $\hat{F}'_{i,2}$ самок и самцов. Далее, для каждой отдельно взятой выборки ($l_{i,k}; \hat{F}'_{i,k}$), выстроенной параллельно значениям ($l_{i,2}; F'_{i,2}$) модельной выборки, вычислялась выборка разностей ($\ln \hat{F}'_{i,2} - \ln F'_{i,k}$), положительных или отрицательных по знаку, которые затем ранжировали по величине, после чего проводилась оценка сходства или различия между $\hat{F}'_{i,2}$ и $F'_{i,k}$ в данной выборке по парному критерию Вилкоксона. Результаты этой оценки в отдельных выборках самок гольяна разных лет отлова сведены в таблицу 7, в выборках самцов – в таблицу 8.

Таблица 7

Сумма рангов (+) и (-) парного критерия Вилкоксона в выборках самок гольяна разных лет отлова в р. Утка

знак Σ рангов	Суммы рангов разностей ($\ln\hat{F}'_{i,2} - \ln F'_{i,k}$) в разные годы						$\Sigma(\Sigma)$
	2006	2007	2009*	2009**	2010	2011	
+	194	170	181	173	247	180	1148
-	131	155	144	152	78	145	802
<i>n</i> пар	25	25	25	25	25	25	150

* - «мелкие» по длине тела самки,

** - «крупные» по длине тела самки.

К месту напомнить: знак (+) суммы рангов в таблицах означает, что суммы трансформированных значений $\hat{F}'_{i,2}$ модельной выборки самок и(или) самцов, в среднем, больше по величине сумм сопряженных по $i_{i,k}$ значений $F'_{i,k}$. Знак (-) отражает обратную картину.

Таблица 8

Сумма рангов (+) и (-) парного критерия Вилкоксона в выборках самцов гольяна разных лет отлова в р. Утка

знак Σ рангов	Суммы рангов разностей ($\ln\hat{F}'_{i,2} - \ln F'_{i,k}$) в разные годы					$\Sigma(\Sigma)$
	2007	2009*	2009**	2010	2011	
+	218	244	166	284	190	1102
-	107	81	159	41	135	523
<i>n</i> пар	25	25	25	25	25	125

* - «мелкие» по длине тела самцы,

** - «крупные» по длине тела самцы.

Оценка различий между $\hat{F}'_{i,2}$ и $F'_{i,k}$ при помощи парного критерия Вилкоксона [25, табл. 21П] показала на полное их отсутствие во всех шести

парных сравнениях выборок самок в табл. 7 и четырех парных сравнениях выборок самцов в табл. 8.

Достоверные, на 1% уровне значимости, различия по форме тела обнаружены у самцов, отловленных в 2010г. По отношению к совокупности ($I_{i,2}; \hat{F}'_{i,2}$) значения ($I_{i,k}; F'_{i,k}$) выборок самок и самцов гольяна отлова 2010г. "просели" по транспозиции. Подобное "проседание" данных видно и у мелких по длине тела самцов в пробе 2009г. (различия не достоверны).

Причины возникновения различий между $\hat{F}'_{i,2}$ и $F'_{i,k}$ проанализированы и заключаются в следующем. В летнее время 2010г. на территории центральной части Европейской России, Среднем Урале и Зауралье отмечено выпадение аномально низкого количества атмосферных осадков на фоне аномально высоких температур воздуха в нижних слоях атмосферы. Значительно сократился объем поверхностного стока воды в р. Утка. В некоторых местах русло обмелело и представляло собой цепь мелководных плесов, соединенных друг с другом слабым ручьем.

В итоге, к августу месяцу 2010 года самки и особенно самцы гольяна не набрали массу тела, свойственную особям этого вида рыб в конце периода летней межени и летних температур среды обитания в годы с благоприятными климатическими характеристиками. Недобор массы тела привел к снижению у рыб линейных размеров таких признаков, как максимальная высота и максимальная толщина тела. То есть, из-за дефицита массы тела к концу лета 2010г. у рыб сформировалась более прогонистая, чем обычно, форма тела.

Итак, на отрезке времени жизни с 2004г. по 2011г. направление динамики значений формы тела, вычисленных по совокупности значений десяти пластических признаков, в онтогенезе самок и самцов речного гольяна в р. Утка, в целом, оставалось неизменным от года к году. За этот период времени были промерены 932 гольяна с длиной тела от 3.01см до 8.27см в разных выборках, что отражает практически весь диапазон значений длины и видовой формы тела у молоди и половозрелых гольянов, обитающих в реке Утка.

Отсутствие различий между $F'_{i,k}$ и $\hat{F}'_{i,2}$ в десяти случаях из одиннадцати парных сравнений выборок ($\ln \hat{F}'_{i,2} - \ln F'_{i,k}$) убеждает нас в том, что ГП (34) и ГП (36), которым ранее присвоен статус вторых математических моделей динамики формы тела самок и самцов гольяна в онтогенезе особей, несмотря на то, что значения их знаменателей $q(F'_{i,2})$ вычислены по данным типа (D) (см. табл. 5 и 6), пригодны описывать естественную динамику всего диапазона значений формы тела самок и самцов гольяна, обитающих в р. Утка, если $l_{i,2}$ модельной выборки ($l_{i,2}; F'_{i,2}$) самок или $l_{i,2}$ аналогичной выборки самцов трансформировать по ГП (33) или ГП (35), соответственно.

С другой стороны, ГП (34) и ГП (36) следует называть математическими моделями, которые отражают норму выраженности формы тела у разных по длине тела самок и самцов речного гольяна в условиях верхнего течения р. Утка. Норма выраженности любого пластического признака, таким образом, в моем представлении есть его определенная величина у разных по длине тела особей вида, которая в конкретных условиях среды обитания особей воспроизводится и поддерживается в популяции вида от года к году "под контролем естественного отбора".

Термин – "норма выраженности размера пластического признака", позаимствован у академика АН СССР С. С. Шварца при общении с ним автора этой публикации в первые годы работы в Институте экологии растений и животных в городе Свердловске (ныне г. Екатеринбург). Автор надеется на то, что по крайней мере – в первом приближении, ответил на вопрос С. С. Шварца: "что представляет собой понятие – норма выраженности морфологического признака?".

Акцентирую внимание читателя на сказанном выше. Геометрические прогрессии (33) и (34), (35) и (36) могут быть использованы для установления сходства и различий по форме тела самок и самцов речного гольяна, обитающих в разных популяциях вида. Иллюстрация трансформации ($l_{i,2}; F'_{i,2}$) на выборки ($l_{i,k}; F'_{i,k}$) рыб разных лет отлова – основа метода проведения сравнительного анализа такого типа. Очевидно, что для достижения желаемого

результата необходимо использовать только выборки значений ($l_{i,2}; F'_{i,2}$), то есть значения признаков модельных выборок самок и самцов речного гольяна из реки Утка. При этом, для оценки морфологической определенности формы тела гольянов в той или другой популяции вида достаточно, как видим, примерно на одном отрезке времени календарного года отловить для анализа и промерить всего одну выборку половозрелых самок и аналогичную выборку самцов.

Ясно при этом, что для проведения сравнительного межпопуляционного анализа набор пластических признаков, призванных отражать форму тела рыб и других животных, может быть каким угодно, но всегда одинаковым по числу и составу признаков, значения которых, в свою очередь, должны быть представлены в однородных и одного масштаба единицах измерения. Для этого желательно, чтобы набор пластических признаков был оговорен предварительно на форуме научной общественности, хотя бы на уровне тематической научной лаборатории. Последнее позволит исключить неизбежное разнообразие в вариантах выбора признаков разными исследователями и, тем самым, предотвратит нестыковку результатов разных исследований видовой динамики формы тела животных, проведенных в разных частях ареала вида.

Видим, что пришло время создавать на базе интернета банки первичных данных, состоящие из модельных выборок измеренных значений некоторого числа пластических признаков Y и длины тела X особей популяции конкретного вида животных, модельных отношений x_i/y_i значений признаков в модельных выборках, расчетных величин знаменателей геометрических прогрессий – моделей динамики значений длины тела X , отдельных признаков Y и формы тела F_i для самок и самцов из отдельных популяций вида.

Все перечисленные выше необходимые исходные данные для организации и проведения исследований по оценке динамики формы тела самок и самцов речного гольяна в разных частях ареала вида помещены в приложении к данной работе.

Глава 4. Определение количественных характеристик разных состояний билатеральных признаков животных

В конце второй половины двадцатого столетия нашей эры в работах отечественных биологов возникло и укоренилось в дальнейшем новое направление исследований – оценка симметричности (одинаковости по линейным размерам) или асимметричности билатеральных пластических морфологических признаков животных методами математической статистики. Анализ становления и развития методической базы на начальном этапе исследований по данной теме приведен в работе В.М. Захарова [31].

Так получилось, что первое знакомство с методом расчета “оценок асимметрии” четырех билатеральных пластических признаков черепа домовой мыши [32] – путем вычисления положительных и отрицательных значений индексов: $2(y_{i,\text{слева}} - y_{i,\text{справа}})/(y_{i,\text{слева}} + y_{i,\text{справа}})$ – в первый момент времени вызвало у автора этих строк протестное отношение не только к данной математической процедуре вычисления “независимых от абсолютных размеров оценок”, но и к самому предмету исследований – оценке асимметрии билатеральных признаков.

К месту напомнить читателю о том, что размеры пластических морфологических признаков животных теснейшим образом взаимосвязаны с размерами их тела биологически. В онтогенезе, на этапе роста тела животных, абсолютные линейные размеры тела и пластических признаков увеличиваются. При этом относительный размер головы у рыб, например, по мере роста размера тела уменьшается. Тем не менее нет надобности показывать и доказывать то, что чем больше абсолютные линейные размеры тела у рыб конкретного вида, тем больше у этих рыб и абсолютные линейные размеры головы.

Индекс y_i / x_i есть математическая запись формы биологической взаимосвязи, а поэтому и взаимозависимости между измеренными x_i и y_i значениями признаков X и Y . Можно использовать другую математическую запись соотношений x_i и y_i , например y_i / x_i^α – параметр B степенной функции

$y_i = B \cdot x_i^\alpha$. Исходная биологическая взаимосвязь и взаимозависимость между измеренными величинами x_i и y_i при этом никуда не исчезнет: меньше линейный размер тела x_i – меньше аналогичный размер признака y_i , большие линейный размер x_i – больше размер y_i .

Не является исключением и динамика размеров таких “сезонных” пластических признаков, как масса тела и внутренних органов животных. Их минимальное значение в отдельные сезоны календарного года в полной мере соответствует сказанному выше – наличию взаимосвязи между физическими линейными размерами тела и физическими линейными размерами этих признаков. Ликвидировать взаимосвязь и, следовательно, взаимозависимость между размерами x_i и y_i невозможно никакими математическими преобразованиями. Таким образом индекс y_i / x_i , с одной стороны, есть математическая запись формы биологической взаимосвязанности между x_i и y_i признаков X и Y – отношение измеренных величин x_i и y_i , с другой – количественное отношение этих величин, выраженных в однородных и одного масштаба единицах измерения линии [13].

Такая позиция на информационное содержание индекса y_i / x_i привела к тому, что первое логическое представление о способе оценки наличия или отсутствия асимметрии по измеренным значениям отдельного билатерального пластического признака было сформулировано в виде словесного утверждения только в 2000г. – в пятом пункте пояснений к таблице в работе [12].

Теперь, после выхода в свет работ [8;9], у меня созрело твердое намерение изложить свою точку зрения на то, как математически следует определять: симметричность или асимметричность левой и правой сторон билатерального пластического признака Y , односторонность – динамическую изометрию – и (или) разнонаправленность динамики его значений $y_{i,\text{слева}}$ и $y_{i,\text{справа}}$ по материалам измерения разных по размерам тела животных. Настоящая глава выполнена по результатам измерения билатерального пластического признака – длина головы слева и справа у разных по длине тела самок и самцов речного гольяна (*Phoxinus phoxinus* L.), отловленных из популяции особей вида, обитающей в р.

Утка, на отрезке времени с 2004г. по 2012г. Очевидно, что рыбы в выборках, по результатам измерения которых сформированы таблицы 5 и 6, и рыбы, использованные в этой главе, отловлены в разные промежутки календарного времени. Следовательно, выборки рыб разного времени отлова коренным образом различаются по составу самок и самцов гольяна. Сделано это в первую очередь для того, чтобы при решении поставленной задачи в данной главе рыбы обоих полов в выборках были представлены максимально возможным числом особей в разных размерных классах длины тела.

Материалы измерения длины головы слева и справа у рыб, отловленных в р. Утка, относятся к смешанным профильным данным типа (D) [1. стр. 106]. Тем не менее в предыдущей главе и [8] показано, как данные такого типа – числовые ряды значений формы тела рыб, однозначно отразили динамику формы тела самок и самцов гольяна, обитавших в р. Утка на отрезке календарного времени проведения исследований с 2004г. по 2012г. Этот факт явился главным аргументом для принятия решения использовать необходимую часть собранных исходных данных для воспроизведения и количественной оценки картины динамики роста линейных размеров головы слева и справа у особей гольяна в процессе роста длины их тела в естественных условиях среды обитания.

Так же как во второй главе, ранжированные по величине ряды числовых значений длины тела самок и самцов гольяна были разделены на классы с размером 0.5 см, затем по измеренным значениям длины тела двухсот восьмидесяти шести самок были сформированы двенадцать выборок самок, а по значениям длины тела двухсот одного самца – девять выборок самцов. Выборочные средние геометрические значения длины тела $\tilde{l}_{i,cm}$ и длины головы слева ($\tilde{lC}_{i,слева, cm}$) и справа ($\tilde{lC}_{i,справа, cm}$) у самок и самцов, после их вычисления по соотношению (1), помещены в таблицу 9 и таблицу 10, соответственно. Для математической оценки наличия или отсутствия различий по длине головы слева и справа в отдельных выборках и аналогичной оценки различий по выборочным средним геометрическим значениям длины головы слева и справа

у самок и самцов в разных выборках использован, как и выше, парный критерий Вилкоксона и таблица 21П из [25].

Таблица 9

Выборочные средние геометрические значения длины тела (\tilde{l}_i) и длины головы слева ($\tilde{lC}_{i,\text{слева}}$) и справа ($\tilde{lC}_{i,\text{справа}}$) у самок гольяна из р. Утка

№ выборки	\tilde{l}_i , см	$\tilde{lC}_{i,\text{слева}}$, см	$\tilde{lC}_{i,\text{справа}}$, см	$\frac{\tilde{lC}_{i,\text{слева}}}{\tilde{lC}_{i,\text{справа}}}$	n	Парный критерий Вилкоксона			
						Разность \ln^*	Ранг	+**	-
1	2.8529	0.6514	0.6560	0.9930	25	-0.00704	10	130	195
2	3.2108	0.7289	0.7357	0.9907	25	-0.00929	11	145	180
3	3.7829	0.8475	0.8514	0.9954	25	-0.00459	8	152	173
4	4.3139	0.9526	0.9668	0.9853	25	-0.01480	12	78	247
5	4.8000	1.0619	1.0647	0.9974	25	-0.00263	5	144	181
6	5.2282	1.1409	1.1440	0.9973	25	-0.00271	6	146	179
7	5.7394	1.2293	1.2360	0.9946	25	-0.00543	9	120	205
8	6.2611	1.3338	1.3343	0.9996	25	-0.00037	2	158	167
9	6.7930	1.4376	1.4425	0.9966	25	-0.00340	7	148	177
10	7.2294	1.4858	1.4857	1.0001	25	0.00007	1	180	145
11	7.7457	1.5804	1.5829	0.9984	25	-0.00158	4	179	146
12	8.2508	1.6687	1.6705	0.9989	11	-0.00108	3	44	22

Примечание: * - разность логарифмов ($\ln \tilde{lC}_{i,\text{слева}} - \ln \tilde{lC}_{i,\text{справа}}$) выборочных средних в каждой отдельной выборке рыб; ** - сумма рангов (+) и (-) разностей логарифмов ($\ln lC_{i,\text{слева}} - \ln lC_{i,\text{справа}}$) в каждой выборке; n – число рыб в каждой выборке.

Сравнение совокупностей сопряженных значений $lC_{i,\text{слева}}$ и $lC_{i,\text{справа}}$ в каждой из двенадцати выборок самок и девяти выборок самцов по парному критерию Вилкоксона показало на полное отсутствие различий между их величинами (см. таблица 11). Однако сравнение рядов сопряженных $\tilde{lC}_{i,\text{слева}}$ и $\tilde{lC}_{i,\text{справа}}$ в двенадцати выборках самок в табл. 9 и девяти выборках самцов в табл. 10 при помощи того же критерия привело к иному результату. У самок в одиннадцати выборках из двенадцати выборочных средняя геометрическая

длина головы справа оказалась больше по величине, чем выборочная средняя длина головы слева – различия достоверны на 1% уровне значимости. В таблице 10 у самцов выборочные $\tilde{C}_{i,\text{справа}}$ в семи случаях из девяти больше по величине, чем $\tilde{C}_{i,\text{слева}}$. Статистические различия не установлены, но характер различий по величине в целом такой же, как и у самок. При объединении рядов сопряженных значений $\tilde{C}_{i,\text{слева}}$ и $\tilde{C}_{i,\text{справа}}$ самок и самцов в один ряд получен результат, согласно которому в восемнадцати случаях из двадцати одного значения $\tilde{C}_{i,\text{справа}}$ больше по величине, чем $\tilde{C}_{i,\text{слева}}$ – различия достоверны на 1% уровне значимости.

Таблица 10

Выборочные средние геометрические значения длины тела (\tilde{l}_i) и длины головы слева ($\tilde{C}_{i,\text{слева}}$) и справа ($\tilde{C}_{i,\text{справа}}$) у самцов гольяна из р. Утка

№ выборки	\tilde{l}_i , см	$\tilde{C}_{i,\text{слева}}$, см	$\tilde{C}_{i,\text{справа}}$, см	$\frac{\tilde{C}_{i,\text{слева}}}{\tilde{C}_{i,\text{справа}}}$	n	Парный критерий Вилкоксона			
						Разность \ln^*	Ранг	**	-
1	3.2248	0.7385	0.7427	0.9943	25	-0.00567	4	125	200
2	3.8516	0.8706	0.8773	0.9924	19	-0.00767	7	96	94
3	4.2734	0.9710	0.9735	0.9974	25	-0.00257	1	156	169
4	4.7437	1.0686	1.0753	0.9938	25	-0.00625	5	132	193
5	5.3158	1.1818	1.1925	0.9910	25	-0.00901	8	148	177
6	5.6896	1.2243	1.2408	0.9867	25	-0.01339	9	232	93
7	6.1889	1.3359	1.3303	1.0042	25	0.00420	3	178	147
8	6.7110	1.4222	1.4263	0.9971	25	-0.00288	2	152	173
9	7.3680	1.5427	1.5317	1.00716	7	0.00716	6	22	6

Примечание: * и ** - обозначение те же, что и в табл.9.

Направленность динамики роста линейных размеров билатерального пластического признака по длине тела исходно можно оценить по геометрическим прогрессиям ($\tilde{y}_{i,\text{слева}}/\tilde{x}_i$) и ($\tilde{y}_{i,\text{справа}}/\tilde{x}_i$), где \tilde{x}_i – выборочная длина тела рыб. Каждое из этих отношений двух величин представляет собой математическую запись формы биологической зависимости размера признака

от размера тела (длины тела у рыб). Очевидно, что для выборки рыб и других животных будет выполняться такое соотношение:

$$(\tilde{Y}_{i,\text{слева}}/\tilde{X}_i) / (\tilde{Y}_{i,\text{справа}}/\tilde{X}_i) = (\tilde{Y}_{i,\text{слева}}/\tilde{Y}_{i,\text{справа}}), \quad (37)$$

где в правой его части измеренные средние размеры билатерального признака Y математически не связаны с размерами тела. Понятно при этом, что биологическая зависимость между размером признака и размером тела никак не исчезла, какие бы математические преобразования мы не производили. Но теперь только одна геометрическая прогрессия отношений $(\tilde{Y}_{i,\text{слева}}/\tilde{Y}_{i,\text{справа}})$, а не две, как записано выше, может послужить тем математическим выражением, при помощи которого будет возможно оценить направленность динамики значений $\tilde{Y}_{i,\text{слева}}$ и $\tilde{Y}_{i,\text{справа}}$ по отношению друг другу в процессе роста значений \tilde{X}_i .

Таблица 11

Суммы рангов (+) и (-) парного критерия Вилкоксона в выборках самок и самцов гольяна из р. Утка (отлов 2004-2012г.)

№ выборки		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
♀	+	130	145	152	78	144	146	120	158	148	180	179	44
	-	195	180	173	247	181	179	205	167	177	145	146	22
	n пар	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	11
♂	+	125	96	156	132	148	232	178	152	22			
	-	200	94	169	193	177	93	147	173	6			
	n пар	25	19	25	25	25	25	25	25	7			

Оценку направленности значений $IC_{i,\text{слева}}$ и $IC_{i,\text{справа}}$ по отношению друг другу у самок и самцов гольяна осуществим по данным табл. 9 и табл. 10. Вначале по двенадцати $\tilde{C}_{i,\text{слева}}$ и двенадцати $\tilde{C}_{i,\text{справа}}$ у самок гольяна вычислим реперные точки ГП так, как показано в табл. 5 и 6: $R_1=0.8355$ см; $R_2=1.3999$ см; $R_1=0.8419$ см; $R_2=1.4028$ см, соответственно, а величину знаменателей ГП вычислим по соотношению (25), где $n=10$: $q(\tilde{C}_{i,\text{слева}})=\sqrt[9]{1.3999/0.8355}=1.0590$; $q(\tilde{C}_{i,\text{справа}})=\sqrt[9]{1.4028/0.8419}=1.0584$, соответственно. Видим, что

величина отношения знаменателей $1.0590/1.0584=1.00057$ – близка к единице. Выше показано (табл. 11) – при помощи формального математического критерия (парного критерия Вилкоксона) установлено полное отсутствие различий между сопряженными $lC_{i,\text{слева}}$ и $lC_{i,\text{справа}}$ во всех двенадцати выборках самок и девяти выборках самцов. Поэтому с полной уверенностью правомерно утверждать – сопряженные $lC_{i,\text{слева}}$ и $lC_{i,\text{справа}}$ в отдельных выборках и выборочные средние $\tilde{lC}_{i,\text{слева}}$ и $\tilde{lC}_{i,\text{справа}}$ у самок гольяна по отношению друг другу изменялись однонаправленно от выборки к выборке.

Расчет реперных точек и знаменателя ГП длины головы слева у самцов гольяна проведен по данным девяти выборок самцов в табл. 10: $R_1=0.90375$ см; $R_2=1.3350$ см; при $n=10$ в соотношении(25) $q(\tilde{lC}_{i,\text{слева}})=1.0443$. Для ряда значения $\tilde{lC}_{i,\text{справа}}$: $R_1=0.9084$ см; $R_2=1.33875$ см; $q(\tilde{lC}_{i,\text{справа}})=1.0440$. Величина отношения $q(\tilde{lC}_{i,\text{слева}})/q(\tilde{lC}_{i,\text{справа}})=1.00029$ близка к единице так же, как и у самок. И здесь правомерно утверждение – по отношению друг другу сопряженные величины $lC_{i,\text{слева}}$ и $lC_{i,\text{справа}}$, как и сопряженные величины выборочных средних $\tilde{lC}_{i,\text{слева}}$ и $\tilde{lC}_{i,\text{справа}}$ в девяти выборках самцов изменились однонаправленно от выборки к выборке.

Вернемся вновь к табл. 9 и табл. 10. В одиннадцати выборках самок в табл. 9 значения выборочных $\tilde{lC}_{i,\text{справа}}$ больше по величине значений $\tilde{lC}_{i,\text{слева}}$. То же самое можно увидеть в семи выборках самцов, представленных в табл. 10. Отмеченное здесь и результаты расчетов по определению направленности роста размеров головы слева и справа убеждают в том, что в билатеральном признаке – длина головы слева и справа у самок и самцов гольяна из популяции вида, обитающей в р. Утка, прослеживается косость в его морфологической конструкции. При равенстве знаменателей ГП – $q(\tilde{lC}_{i,\text{слева}})/q(\tilde{lC}_{i,\text{справа}})=1.000$, неравенство $\tilde{lC}_{i,\text{слева}} < \tilde{lC}_{i,\text{справа}}$ в отдельных выборках рыб обоего пола имеет место практически на всем протяжении рядов средних значений данного признака. Поэтому в общепринятую терминологию по определению отдельных явлений или процессов функционирования биологических объектов

правомерно ввести понятие – биологическая динамическая косость морфологической конструкции билатерального пластического признака.

Когда в отдельной выборке ($x_{i,k}$; $y_{i,\text{слева}}$; $y_{i,\text{справа}}$) или в некотором числе выборок измеренных значений билатерального признака Y сопряженные выборочные $y_{i,\text{слева}}$ и $y_{i,\text{справа}}$ ранжировать по длине тела – $x_{i,k}$, то для различных по величине $x_{i,k}$ могут иметь место случаи разного сочетания сопряженных величин: $y_{i,\text{слева}} > y_{i,\text{справа}}$; $y_{i,\text{слева}} = y_{i,\text{справа}}$; $y_{i,\text{слева}} < y_{i,\text{справа}}$. Разная комбинаторика встречаемости данных вариантов в последовательности сопряженных $\tilde{y}_{i,\text{слева}}$ и $\tilde{y}_{i,\text{справа}}$, надо полагать, и представляет собой случаи проявления так называемой флюктуирующей асимметрии. В табл. 9 $\tilde{lC}_{i,\text{слева}} < \tilde{lC}_{i,\text{справа}}$ в одиннадцати выборках самок, но в десятой выборке $\tilde{lC}_{i,\text{слева}} = \tilde{lC}_{i,\text{справа}}$. Среди девяти выборок самцов в табл. 10 насчитывается семь выборок, где $\tilde{lC}_{i,\text{слева}} < \tilde{lC}_{i,\text{справа}}$ и две выборки, в которых $\tilde{lC}_{i,\text{слева}} > \tilde{lC}_{i,\text{справа}}$. И тем не менее, терминологическое определение данного явления как флюктуацию величин признаков, тем более – прямое определение причин его возникновения – следует считать преждевременным и даже не возможным. Размеры билатеральных пластических признаков: парных костей черепа позвоночных животных, чешуй и костных наростов (жучек) на правом и левом боках рыб и других признаков – не подвержены сезонной изменчивости, это не масса тела и внутренних органов. Конечно, нельзя забывать и то, что существуют исключения – размеры рогов, например, и даже их отсутствие в зимние времена года у представителей семейства оленей.

И все же наличие достоверных статистических различий между $y_{i,\text{слева}}$ и $y_{i,\text{справа}}$ в отдельных выборках (в материалах, помещенных в табл. 11, такие различия не установлены), и тем более – между $\tilde{y}_{i,\text{слева}}$ и $\tilde{y}_{i,\text{справа}}$, всегда должно обращать на себя пристальное внимание.

Использованные здесь данные по длине тела и длине головы слева и справа у самок и самцов гольяна из популяции вида, обитающей в р. Утка, являются смешанными профильными типа (D). Для оценки флюктуирующей

асимметрии эти данные не пригодны. Решение таких задач возможно, вероятно, при наличии как минимум профильных данных типа (С).

Выше показано, что для описания динамики $lC_{i,\text{слева}}$ и $lC_{i,\text{справа}}$ самок и самцов гольяна проведен расчет знаменателей ГП по данным табл. 9 и табл. 10, в результате чего получены такие величины: $q(\tilde{l}C_{i,\text{слева}})=1.0590$ и $q(\tilde{l}C_{i,\text{справа}})=1.0584$ – для самок; $q(\tilde{l}C_{i,\text{слева}})=1.0443$ и $q(\tilde{l}C_{i,\text{справа}})=1.0440$ – для самцов. Видовая константа для самок – $q(\tilde{l}C_{i,\text{слева}})=1.0570$, вычислена в работе [9] по данным табл.5. Аналогичная видовая константа у самцов $q(\tilde{l}C_{i,\text{слева}})=1.05082$ вычислена по данным девяти выборок самцов отлова 2004 – 2006гг. и ее значение также приведено в работе [9, стр.11]. Видим, что вычисленные по разным базам исходных данных знаменатели ГП $\tilde{l}C_{i,\text{слева}}$ у самок одной популяции вида практически совпали по величине (1.0590 и 1.0570), чего не скажешь при обращении к одноименным оценкам знаменателей ГП самцов (1.0443 и 1.05082). Выясним поэтому, как опишут ГП с такими знаменателями вторую, третью, ..., девятую выборки ($l_i; lC_{i,\text{слева}}$) самцов гольяна из этой работы (табл.10).

Первоначально трансформируем модельную выборку $(l_{i,m}; lC_{i,\text{слева},m})$ – первую выборку самцов (табл.10) по геометрическим прогрессиям с $q(\tilde{l}_{i,m})=1.05552$ и $q(\tilde{l}C_{i,\text{слева},m})=1.05082$ – видовым константам [9, стр.11] на “место расположения на плоскости рисунка системы декартовых координат OX и OY 2, 3, ..., 9 выборок $(l_{i,k}; lC_{i,\text{слева},k})$ самцов”. Процедура трансформации отдельных $(l_{i,m}; lC_{i,\text{слева},m})$ подробна изложена в [8, стр.27] и главе 2.

Итоги трансформации – результаты вычисления сумм рангов разностей ($\ln \tilde{l}C_{i,\text{слева},m} - \ln lC_{i,\text{слева},k}$) – положительных и отрицательных по величине, помещены в табл.12. Знак (+) суммы рангов табл.12 означает, что сумма трансформированных значений $\tilde{l}C_{i,\text{слева},m}$ модельной выборки самцов в среднем больше по величине суммы сопряженных по $l_{i,k}$ значений $lC_{i,\text{слева},k}$ в k -й выборке. Знак (-) отражает обратную картину.

Таблица 12

Сумма рангов (+) и (-) парного критерия Вилкоксона в каждой из восьми выборок ($l_{i,k}$; $lC_{i,\text{слева},k}$) самцов

знак Σ рангов	Суммы рангов разностей $(\ln \widehat{lC}_{i,\text{слева},m} - \ln lC_{i,\text{слева},k})$ в разных выборках самцов								$\Sigma(\Sigma)$
	2	3	4	5	6	7	8	9	
+	75	115	98	115	216	181	231	18	1049
-	115	210	227	210	109	144	94	10	1119
п пар	19	25	25	25	25	25	25	7	176

Оценка различий между $\widehat{lC}_{i,\text{слева},m}$ и $lC_{i,\text{слева},k}$ по таблице 21П [25] парного критерия Вилкоксона показала на полное их отсутствие во всех восьми парных сравнениях выборок самцов (см. табл.12). То есть, геометрические прогрессии с знаменателями – видовыми константами, полностью описали вторую – девятую выборки ($l_{i,k}$; $lC_{i,\text{слева},k}$) самцов.

А теперь ту же самую совокупность выборок ($l_{i,k}$; $lC_{i,\text{слева},k}$) самцов опишем ГП с знаменателями: $q(\tilde{l}_i)=1.05062$; $q(\widehat{lC}_{i,\text{слева},k})=1.0443$ (расчет знаменателей проведен выше – по табл.10). Как видно в табл.13 модельная выборка ($l_{i,m}$; $lC_{i,\text{слева},m}$) при ее трансформации по геометрическим прогрессиям с такими значениями знаменателей прошла ниже четвертой и пятой выборок измеренных значений длины тела и длины головы слева у самцов гольяна (различия достоверны на 1% уровне значимости).

Таблица 13

Сумма рангов (+) и (-) парного критерия Вилкоксона в каждой из восьми выборок ($l_{i,k}$; $lC_{i,\text{слева},k}$) самцов

знак Σ рангов	Суммы рангов разностей $(\ln \widehat{lC}_{i,\text{слева},m} - \ln lC_{i,\text{слева},k})$ в разных выборках самцов								$\Sigma(\Sigma)$
	2	3	4	5	6	7	8	9	
+	57	82	61	61	132	83	98	6	580
-	133	243	264	264	193	242	227	22	1588
п пар	19	25	25	25	25	25	25	7	176

Поступим иначе – по (25) из главы 2 – соотношению (3) из работы [8], в котором $n=10$, вычислим значения знаменателей ГП для рядов $\tilde{l}_{i,k}$ и $\tilde{C}_{i,\text{слева},k}$ из табл.10 по одноименным выборочным средним геометрическим значениям этих признаков, присвоив выборочным средним величинам статус реперных точек. То есть, для ГП $(\tilde{l}_i)_1$: $R_1=\tilde{l}_{i,1}$; $R_2=\tilde{l}_{i,2}$; ГП $(\tilde{l}_i)_2$: $R_1=\tilde{l}_{i,2}$; $R_2=\tilde{l}_{i,3}$; ГП $(\tilde{l}_i)_3$: $R_1=\tilde{l}_{i,3}$; $R_2=\tilde{l}_{i,4}$; ...; ГП $(\tilde{l}_i)_8$: $R_1=\tilde{l}_{i,8}$; $R_2=\tilde{l}_{i,9}$. Аналогичным способом запишем для ГП $(\tilde{C}_{i,\text{слева}})_1$: $R_1=\tilde{C}_{i,\text{слева},1}$; $R_2=\tilde{C}_{i,\text{слева},2}$; ГП $(\tilde{C}_{i,\text{слева}})_2$: $R_1=\tilde{C}_{i,\text{слева},2}$; $R_2=\tilde{C}_{i,\text{слева},3}$; ГП $(\tilde{C}_{i,\text{слева}})_3$: $R_1=\tilde{C}_{i,\text{слева},3}$; $R_2=\tilde{C}_{i,\text{слева},4}$; ...; ГП $(\tilde{C}_{i,\text{слева}})_8$: $R_1=\tilde{C}_{i,\text{слева},8}$; $R_2=\tilde{C}_{i,\text{слева},9}$.

Результаты вычисления знаменателей ГП по (25), где $n=10$, занесем в табл.14. Геометрические прогрессии $l_{i,k}$ и $lC_{i,\text{слева},k}$ с соответствующими значениями знаменателей в табл.14 назовем частными ГП. А теперь по сопряженным частным ГП $(\tilde{l}_{i,k})$ и ГП $(\tilde{C}_{i,\text{слева},k})$ математически и мысленно трансформируем модельную выборку $(l_{i,m}; lC_{i,\text{слева},m})$ “на плоскости рисунка системы координат OX и OY – на место расположения здесь восьми последующих выборок $(l_{i,k}; lC_{i,\text{слева},k})$ самцов гольяна”.

Возможны два варианта трансформации модельной выборки $(l_{i,m}; lC_{i,\text{слева},m})$: первый – по средним геометрическим частных значений знаменателей ГП $(\tilde{l}_{i,k})$ и ГП $(\tilde{C}_{i,\text{слева},k})$ из табл.14: $q(\tilde{l}_{i,k}) = 1.01154$ и $q(\tilde{C}_{i,\text{слева},k})=1.01128$, второй вариант – по отдельным частным ГП с одноименными частными значениями знаменателей, начиная с первого отрезка между $(\tilde{l}_{i,m,1}; \tilde{C}_{i,\text{слева},m,1})$ и $(\tilde{l}_{i,2}; \tilde{C}_{i,\text{слева},2})$, затем по ГП с знаменателями $q(\tilde{l}_{i,2})$ и $q(\tilde{C}_{i,\text{слева},2})$ и значениям $(\tilde{l}_{i,m,2}; \tilde{C}_{i,\text{слева},m,2})$ в позиции $(\tilde{l}_{i,2}; \tilde{C}_{i,\text{слева},2})$ к $(\tilde{l}_{i,3}; \tilde{C}_{i,\text{слева},3})$, и далее, до восьмого отрезка между $(\tilde{l}_{i,8}; \tilde{C}_{i,\text{слева},8})$ и $(\tilde{l}_{i,9}; \tilde{C}_{i,\text{слева},9})$.

Особо следует обратить внимание читателя на то, что каждая последующая трансформация модельной выборки на очередном отрезке начинается с итоговых значений всех ее членов $(\tilde{l}_{i,m,k}; \tilde{C}_{i,\text{слева},m,k})$ на предыдущем отрезке трансформации.

Таблица 14

Знаменатели частных ГП для описания динамики длины тела, длины головы слева и справа от выборки к выборке у самцов гольяна из р. Утка (данные по отлову рыб в 2004-2012гг.).

№ выборки	\tilde{l}_i , см	$q(\tilde{l}_i)$	$q(\tilde{lC}_{i,\text{слева}})$	$q(\tilde{lC}_{i,\text{справа}})$	$\frac{q(\tilde{lC}_{i,\text{слева}})}{q(\tilde{lC}_{i,\text{справа}})}$
1	3.2248	1.01993	1.01845	1.01868	0.9998
2	3.8516	1.01161	1.01220	1.01163	1.0006
3	4.2734	1.01167	1.01070	1.01111	0.9996
4	4.7437	1.01273	1.01125	1.01156	0.9997
5	5.3158	1.00758	1.00393	1.00442	0.9995
6	5.6896	1.00939	1.00974	1.00777	1.0019
7	6.1889	1.00904	1.00698	1.00777	0.9992
8	6.7110	1.01043	1.00908	1.00795	1.0011
9	7.3681				
~*	1.01154		1.01128	1.01010	1.0008

Примечание: * - средние геометрические знаменатели частных ГП.

Результаты трансформации модельной выборки по первому варианту помещены в табл.15. По сравнению с данными табл.13 геометрическая прогрессия $(\tilde{l}_{i,m}; \tilde{lC}_{i,\text{слева},m})$ "прошла" заметно выше совокупности точек $(l_{i,k}; lC_{i,\text{слева},k})$ в пятой – девятой выборках. В шестой, седьмой и восьмой выборках различия достоверны на 1% уровне значимости.

Таблица 15

Сумма рангов (+) и (-) парного критерия Вилкоксона в каждой из восьми выборок $(l_{i,k}; lC_{i,\text{слева},k})$ самцов

знак Σ рангов	Суммы рангов разностей $(\ln \tilde{lC}_{i,\text{слева},m} - \ln lC_{i,\text{слева},k})$ в разных выборках самцов								$\Sigma(\Sigma)$
	2	3	4	5	6	7	8	9	
+	97	164	177	221	300	304	317	26	1606
-	93	161	148	104	25	21	8	2	562
n пар	19	25	25	25	25	25	25	7	176

Трансформацию ($l_{i,m}; lC_{i,\text{слева},m}$) по второму варианту осуществим при строгом соблюдении правил преемственности значений признаков ($l_{i,m,k}; lC_{i,\text{слева},m,k}$) в конце каждого предыдущего отрезка, используя при этом следующие по порядку значения знаменателей ГП из табл.14.

Таблица 16

Сумма рангов (+) и (-) парного критерия Вилкоксона в каждой из восьми выборок ($l_{i,k}; lC_{i,\text{слева},k}$) самцов

знак Σ рангов	Суммы рангов разностей ($\ln \widehat{lC}_{i,\text{слева},m} - \ln lC_{i,\text{слева},k}$) в разных выборках самцов									$\Sigma(\Sigma)$
	2	3	4	5	6	7	8	9	2-9	
+	78	177	171	173	171	185	185	10	1150	
-	112	148	154	152	154	140	140	18	1018	
п пар	19	25	25	25	25	25	25	7	176	

Итоги очередной трансформации модельной выборки помещены в табл.16. Видим, что по сравнению с предыдущими (табл.12, 13, 15), данная трансформация модельной выборки ($l_{i,m}; lC_{i,\text{слева},m}$) самцов при помощи частных ГП выполнена идеально. Осуществим теперь аналогичную трансформацию ($l_{i,m}; lC_{i,\text{справа},m}$) самцов по частным ГП на вторую – девятую выборки ($l_{i,k}; lC_{i,\text{справа},k}$), использовав для этой цели знаменатели частных ГП $q(\tilde{l}_i)$ и $q(\tilde{lC}_{i,\text{справа}})$ из табл.14. Значения длины головы справа у самцов гольяна в модельной выборке ($lC_{i,\text{справа},m}$) выписаны специально для этой трансформации данных из журнала полевых исследований.

Таблица 17

Сумма рангов (+) и (-) парного критерия Вилкоксона в каждой из восьми выборок ($l_{i,k}; lC_{i,\text{справа},k}$) самцов

знак Σ рангов	Суммы рангов разностей ($\ln \bar{l}C_{i,\text{справа},m} - \ln lC_{i,\text{справа},k}$) в разных выборках самцов								$\Sigma(\Sigma)$
	2	3	4	5	6	7	8	9	
+	98	184	174	182	170	182	176	13	1179
-	92	141	151	143	155	143	149	15	989
п пар	19	25	25	25	25	25	25	7	176

По результатам вычислений, помещенным в таблице 17 видно, что и здесь трансформация модельной выборки выполнена идеально. Это означает, что две последние трансформации данных являются иллюстрацией первого в истории науки описания эмпирических криволинейных зависимостей при помощи математического выражения – геометрическая прогрессия с переменными частными значениями знаменателей.

Как бы ни оценили этот математический экспромт другие исследователи, представленный здесь способ описания эмпирических зависимостей используем для уточнения характера направленности процесса совместного увеличения линейных размеров головы слева и справа у самцов гольяна по мере роста значений длины их тела.

Таблица 18

Сумма рангов (+) и (-) парного критерия Вилкоксона в каждой из восьми выборок ($l_{i,k}; lC_{i,\text{справа},k}$) самцов

знак Σ рангов	Суммы рангов разностей ($\ln \bar{l}C_{i,\text{справа},m} - \ln lC_{i,\text{справа},k}$) в разных выборках самцов								$\Sigma(\Sigma)$
	2	3	4	5	6	7	8	9	
+	93	192	185	177	148	232	195	22	1244
-	97	133	140	148	177	93	130	6	924
п пар	19	25	25	25	25	25	25	7	176

Для этого трансформируем модельную выборку $(l_{i,m}; \mathbf{IC}_{i,\text{справа},m})$ самцов гольяна по частным ГП с знаменателями $q(\tilde{l}_i)$ и $q(\tilde{\mathbf{IC}}_{i,\text{слева}})$ из табл.14. Аналогичный прием замены “своих” характеристик на “чужие” использован в работах [8; 13] и здесь, на стр. 45 в главе 2. Разность между имеющими место измеренными $(\mathbf{IC}_{i,\text{справа},k})$ и трансформированными $(\tilde{\mathbf{IC}}_{i,\text{справа},m})$ оценим при помощи все того же парного критерия Вилкоксона.

В табл.18 видно, что все выборки самцов описаны частными ГП чисто. Тем самым подтвердилось сделанное ранее заключение о том, что значения длины головы слева и справа у самцов гольяна изменялись однонаправленно по мере увеличения длины тела рыб.

А теперь перенесем в таблицу 19 ряды выборочных средних геометрических значений длины $\tilde{l}_{i,k}$ и формы тела $\tilde{F}_{i,k}''$ самок и самцов гольяна из таблиц 5 и 6. Отдельно для самок и самцов рассчитаем по (25) с $n=10$ значения знаменателей $q(\tilde{l}_i)$ и $q(\tilde{F}_i'')$ частных геометрических прогрессий и поместим эти значения в таблицу 19 так, как это выполнено в таблице 14 после вычисления знаменателей частных ГП для описания динамики длины тела, длины головы слева и справа у самцов гольяна.

В отличие от предыдущего примера трансформации значений длины тела и длины головы слева и справа самцов гольяна по частным ГП с соответствующими значениями знаменателей из таблицы 14, трансформацию совокупности значений $(l_{i,2}; F_{i,2}'')$ модельной выборки самок гольяна (см. табл. 1П приложения) – после соответствующего преобразования значений ее членов по (2) и (32) – проведем по геометрическим прогрессиям с значениями знаменателей: $q(\tilde{l}_{i,2})=1.01119$; $q(\tilde{F}_{i,2}'')=1.01222$ (см. нижнюю графу в табл. 19), и точно так, как это было выполнено выше – во второй главе – при трансформации модельной выборки $(x_{i,2}; F_{i,2})$ где $x_{i,2}$ – длина тела $l_{i,2}$ самок, по геометрическим прогрессиям, в которых в качестве знаменателей прогрессий были использованы значения видовых констант $q(\tilde{x}_i) = 1.062719$ и $q(\tilde{F}_i)=1.067674$ первых моделей динамики значений длины и формы

тела самок гольяна из р. Утка (табл. 2).

Таблица 19

Знаменатели частных ГП для описания рядов средних геометрических значений длины и формы тела ♀ и ♂ гольяна частными ГП от выборки к выборке по данным таблиц 5 и 6

№ выборки	♀				♂			
	признаки				признаки			
	\tilde{l}_i , см	** \tilde{F}_i'' , см	$q(\tilde{l}_i)$	$q(\tilde{F}_i'')$	\tilde{l}_i , см	\tilde{F}_i'' , см	$q(\tilde{l}_i)$	$q(\tilde{F}_i'')$
1	2.8405	2.8026	1.01513	1.01665	2.8816	2.8515	1.01292	1.01410
2	3.2516	3.2516	1.01636	1.01709	3.2346	3.2346	1.01959	1.02059
3	3.7629	3.7875	1.01409	1.01521	3.8516	3.8860	1.01123	1.01256
4	4.2678	4.3387	1.01413	1.01765	4.2589	4.3482	1.01226	1.01425
5	4.8424	5.0786	1.00894	1.00964	4.7526	4.9387	1.01088	1.01307
6	5.2463	5.5366	1.01090	1.01198	5.2389	5.5509	1.01078	1.01265
7	5.7842	6.1630	1.00928	1.00993	5.7698	6.2161	1.00871	1.00965
8	6.2857	6.7362	1.00848	1.00776	6.2382	6.7771	1.01001	1.01049
9	6.7819	7.2218	1.00582	1.00754	6.8235	7.4446		
10	7.1458	7.7267	1.00879	1.00885				
11	7.7316	8.3642						
**	5.0228	5.2389	1.01119	1.01222	4.6070	4.7950	1.01204	1.01341

Примечание: * – средние геометрические ряды средних значений признаков \tilde{l}_i , \tilde{F}_i'' и \tilde{q}_i частных ГП; ** – выборочные средние геометрические значения формы тела (в масштабе длины тела, см. табл. 5 и 6).

Итоги трансформации $(l_{i,2}; F_{i,2}'')$ модельной выборки самок в этой главе помещены в таблице 20.

Трансформацию совокупности значений $(l_{i,2}; F_{i,2}'')$ модельной выборки самцов гольяна, после аналогичной процедуры преобразования по (2) и (32) измеренных значений отдельных признаков U исходной модельной выборки (табл. 2П приложения), проведем по геометрическим прогрессиям с

$q(\tilde{l}_{i,2})=1.01204$ и $q(\tilde{F}_{i,2}'')=1.01341$, которые вычислены по одноименным значениям частных ГП в таблице 19.

Таблица 20

Сумма рангов (+) и (-) парного критерия Вилкоксона в каждой из десяти выборок ($l_{i,k}$; $F_{i,k}''$) самок

знак Σ	Суммы рангов разностей ($\ln \hat{F}_{i,2}'' - \ln F_{i,k}''$) в разных выборках самок										$\Sigma(\Sigma)$
рангов	1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1-11
+	148	169	203	61	64	120	139	141	114	105	1264
-	177	107	122	129	126	111	92	90	162	126	1242
n пар	25	23	25	19	19	21	21	21	23	21	218

Итоги трансформации совокупности ($l_{i,2}$; $F_{i,2}''$) модельной выборки самцов гольяна поместим в таблицу 21.

Таблица 21

Сумма рангов (+) и (-) парного критерия Вилкоксона в каждой из восьми выборок ($l_{i,k}$; $F_{i,k}''$) самцов

знак Σ	Суммы рангов разностей ($\ln \hat{F}_{i,2}'' - \ln F_{i,k}''$) в разных выборках самцов									$\Sigma(\Sigma)$
рангов	1	3	4	5	6	7	8	9	1-9	
+	14	121	242	206	118	102	86	116	1005	
-	14	69	83	119	207	223	239	160	1114	
n пар	7	19	25	25	25	25	25	23	174	

Обращение к таблице 21П [25] граничных значений критерия Вилкоксона позволяет сделать однозначный вывод – в таблице 20 самок и таблице 21 самцов совокупности попарно связанных вариантов числовых значений $F_{i,2}''$ и $\hat{F}_{i,2}''$ не различаются по величине на всем интервале значений формы тела рыб.

Следовательно, в геометрических прогрессиях – математических моделях динамики длины и формы тела самок и самцов гольяна – использование

знаменателей $q(\tilde{l}_i)$ и $q(F_i'')$ частных ГП и знаменателей ГП, вычисленных в таблицах 5 и 6 иным способом, приводит к одинаковым результатам.

Справедливость последнего суждения может быть принята или отвергнута только результатами дальнейших исследований.

Глава 5. Новый взгляд на понятие корреляции пластических признаков животных и метод её оценки

В третьем и четвертом абзацах введения автор, биолог по образованию и профессиональной деятельности, высказывает свое представление о том, какой результат можно ожидать от использования математических функций в процедуре математической формализации материалов полевых измерений размеров разных пластических морфологических признаков животных.

Степень связи выборочных значений разных морфологических признаков животных в данное время оценивают повсеместно при помощи коэффициента корреляции Пирсона – выборочного коэффициента линейной регрессии.

Принято считать коррелированными такие признаки X и Y , для которых выборочные значения r укладываются в диапазон величин $0.5 \leq r \leq 1$. При выборочных значениях $0 \leq r \leq 0.5$ принимают решение о наличии слабой корреляционной связи между X и Y или о полном ее отсутствии.

Для иллюстрации сказанного на рис.15 системы прямоугольных координат нанесены измеренные значения длины (x_i) и условной массы тела (y_i) тридцати четырех самцов пеляди (*Coregonus peled* Gmelin). Рыбы отловлены автором осенью 1972 года на реке Хулга (Приполярный Урал, бассейн реки Северная Сосьва) в возрасте 6+ - 9+ лет. Длина и условная масса тела рыб на рис. 15 представлены в однородных и одного масштаба единицах измерения линии – сантиметрах [7]. Условная масса тела особи – это числовое значение кубического корня из массы ее тела, первоначально измеренной в граммах (см. глава 1, стр.8).

Величина коэффициента корреляции Пирсона вычислена для тридцати четырех точек ($x_i; y_i$) на рис.15 стандартным методом [4] и равна 0.627. Убеждаемся в том, что результат вычисления r не противоречит представлению о существовании так называемой корреляционной связи между длиной и массой тела у рыб в данной выборке

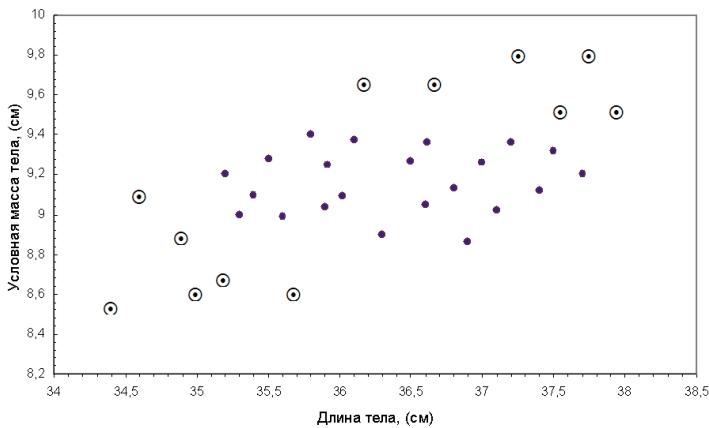


Рис.15. Соотношение между длиной (см) и условной массой тела (см) у 6+-9+летних самцов пеляди в пробе из реки Хулга ($n=34$)

Из исходной совокупности точек $(x_i; y_i)$ на рис.15 исключим шесть крайних левых и шесть крайних правых точек (помечены кружками), наиболее удаленных от геометрического центра области рассеяния точек $(x_i; y_i)$. Для оставшихся двадцати двух точек $(x_i; y_i)$ вычислим выборочное значение r тем же стандартным методом. Результат вычислений таков, что теперь $r = 0.11$. Означает ли это, что в «усеченной» выборке длина и условная масса тела у самцов пеляди не коррелированы, а оставшиеся рыбы не более чем феноменанты? Положительный ответ на данный вопрос граничит с абсурдом. В совокупности пластические морфологические признаки определяют видовой облик животного, особенности строения его тела и, в какой-то мере, функциональные возможности. Исключением из выборки некоторых крайних или средних по размеру тела животных невозможно коренным образом изменить видовое соотношение между длиной и массой тела у особей, остающихся в «усеченных» выборках. Причина отсутствия «корреляции» между длиной и условной массой тела у самцов пеляди на рис. 15 заключена в другом.

Общепринятым считается алгоритм, согласно которому выборочное значение коэффициента корреляции Пирсона, в каком бы виде не представляли

процедуру его вычисления профессиональные математики [4], всегда вычисляется только по линейным отклонениям отдельных вариантов x_i от \bar{x}_i и y_i от \bar{y}_i , где \bar{x}_i и \bar{y}_i – выборочные средние арифметические значения признаков X и Y . По вполне понятным причинам не вычисляют никогда разности между x_i и y_i . Согласно теории азартных игр события (варианты) x_i и y_i – независимые и случайные величины, а в ряде случаев x_i и y_i могут быть представлены в разнородных (длина и масса физического тела) единицах измерения [7].

Из сказанного следует однозначный вывод – коэффициент корреляции Пирсона не пригоден для оценки связи между выборочными x_i и y_i в выборках $(x_i ; y_i)$, сформированных по результатам измерения животных. «Оценка» $r = \sqrt{\alpha_{y/x} \cdot \alpha_{x/y}}$ по определению призвана служить формальным подтверждением возможности построения регрессии y_i по x_i или x_i по y_i той или иной математической функции на плоскости рисунка декартовых координат ОХ и ОУ по экспериментальным $(x_i ; y_i)$ выборки животных или иных природных объектов - и не более того.

Естественно считать, что размеры всех пластических признаков животных теснейшим образом взаимообусловлены и взаимосвязаны. Поэтому степень (или силу) связи выборочных x_i и y_i следует оценивать при помощи геометрического коэффициента корреляции.

Выборочный геометрический коэффициент парной корреляции - \tilde{r}_B в общем представлении, есть показатель, отражающий степень связи x_i и y_i в любых выборках измеренных значений пластических признаков животных, где x_i и y_i выражены в однородных и одного масштаба единицах измерения линии.

Значение \tilde{r}_B определяется во вспомогательной системе прямоугольных координат «Мишень» (см. ниже) и равно среднему геометрическому выборочной совокупности прямых и обратных индексов отношений.

Логической основой изложенного ниже метода оценки корреляционной связи между x_i и y_i в выборочных базах исходных данных служит представление о росте животных, в процессе которого размеры тела и размеры всех других пластических признаков изменяются мультипликативно [11, 12, 20,

21]. Реализация алгоритма метода возможна только при соблюдении конкретной последовательности преобразования размерностей признаков. Первое преобразование размерности признака Y – выражение значений массы тела рыб в единицах измерения линии, проведено в самом начале работы. Исходные данные рисунка 15 использованы для иллюстрации примеров вычисления \tilde{r}_B .

Согласно рис. 15 мы имеем усеченную выборку из 22 пар сопряженных значений длины и условной массы тела самцов пеляди. Выборочные x_i и y_i представлены в сантиметрах – однородных и одного масштаба единицах измерения линии. По условию мультипликативного роста одноименные и разноименные выборочные x_i и y_i должны соотноситься друг с другом по принципу произведения или отношения величин. Видно, что рис.15 такой тип связи переменных не отражает. Связь переменных здесь может быть истолкована по-разному. Графический вариант отражения мультипликативной связи переменных возможен только при одном условии – все x_i и y_i следует преобразовать:

$$x_i/\tilde{x}_i = \hat{x}_i, \quad (38)$$

$$y_i/\tilde{y}_i = \hat{y}_i, \quad (39)$$

где \tilde{x}_i и \tilde{y}_i - выборочные средние геометрические значения длины и условной массы тела. Итоговый результат преобразования таков: $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (\hat{x}_i)} = \tilde{\hat{x}}_i = 1$, $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (\hat{y}_i)} = \tilde{\hat{y}}_i = 1$. То есть, выборочные средние геометрические отношений \hat{x}_i и \hat{y}_i равны единице.

Чтобы нанести \hat{x}_i и \hat{y}_i на плоскость рисунка системы прямоугольных координат OX и OY необходимо предварительно построить на этом рисунке вспомогательную систему прямоугольных координат. Для этого из точки $(0;0)$ – точки пересечения осей координат OX и OY , на ось OX и ось OY последовательно нанесем точки 1 и 0 на линейном расстоянии друг от друга, равном расстоянию от точки $(0;0)$ до точки 1. Отрезок прямой, проведенный на плоскости OX и OY через точку $(1;1)$ параллельно оси OX , назовем осью $O1O\hat{x}$,

а отрезок прямой, проведенный через точку (1;1) параллельно оси OY – осью O1O \hat{y} вспомогательной системы координат O1O \hat{x} и O1O \hat{y} на плоскости системы прямоугольных координат OX и OY.

Оси O1O \hat{x} и O1O \hat{y} вспомогательной системы координат разметим в разные стороны от 1 до 0 с шагом 0.2. А теперь для нанесения всех выборочных \hat{x}_i на ось O1O \hat{x} все варианты $\hat{x}_i > 1$ предварительно выразим в обратных величинах:

$$1/\hat{x}_i = \hat{x}'_i. \quad (40)$$

Аналогичным способом:

$$1/\hat{y}_i = \hat{y}'_i, \quad (41)$$

то есть выразим в обратных величинах все $\hat{y}_i > 1$, после чего станет возможно нанести все выборочные \hat{y}_i на числовую ось O1O \hat{y}'_i .

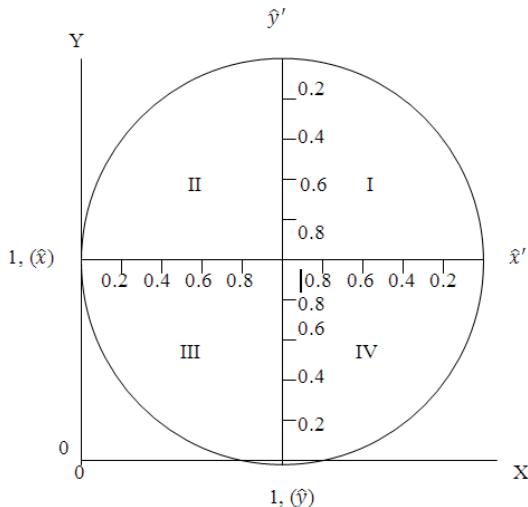


Рис.16. Система координат «Мишень» на плоскости декартовых координат OX и OY. Римскими цифрами обозначены номера четвертей.

Систему прямоугольных координат с центром в точке (1;1) и разметкой осей координат O1O \hat{x} и O1O \hat{y}_i от 1 до 0 по убывающей арифметической прогрессии назовем вспомогательной системой прямоугольных координат «Мишень». При нанесении на «Мишень» выборочные точки $(\hat{x}_i; \hat{y}_i)$

определенным образом распределяются на ее плоскости с координатами: в первой четверти – $(\hat{x}'_i; \hat{y}'_i)$, во второй четверти – $(\hat{x}_i; \hat{y}'_i)$, в третьей четверти – $(\hat{x}_i; \hat{y}_i)$, в четвертой четверти – $(\hat{x}'_i; \hat{y}_i)$.

На рис. 16 система координат «Мишень» нанесена на плоскость системы декартовых координат ОХ и ОY. Точка пересечения осей координат «Мишени» совмещена с точкой (1; 1) системы координат ОХ и ОY. Из точки (1;1) на плоскости координат проведена окружность, которая соприкасается с осями ОХ и ОY в точках ОХ=1 и ОY=1. Оси координат «Мишени» эта окружность пересекает в точках: $\hat{x}_i = 0$, $\hat{x}'_i = 0$, $\hat{y}_i = 0$, $\hat{y}'_i = 0$. Сформулируем три условия. Когда все выборочные \hat{x}_i и \hat{y}_i сосредоточены в геометрическом центре «Мишени» – точке(1; 1), все выборочные x_i и y_i на плоскости координат ОХ и ОY сосредоточены в одной точке – $(\tilde{x}_i; \tilde{y}_i)$, и корреляция между x_i и y_i полная. Выборочные x_i и y_i на плоскости координат ОХ и ОY не коррелированы, если на рис.16 точки $(\hat{x}'_i; \hat{y}'_i)$, $(\hat{x}_i; \hat{y}'_i)$, $(\hat{x}_i; \hat{y}_i)$, $(\hat{x}'_i; \hat{y}_i)$ распределены по всей площади круга. Понятно, что эти два условия являются пограничными для всех возможных вариантов распределения экспериментальных точек на «Мишени» и, соответственно, на плоскости рисунка системы координат ОХ и ОY. Суть третьего условия состоит в том, что каждый конкретный вариант распределения экспериментальных точек на «Мишени» должен быть описан окружностью из геометрического центра (1; 1). Тогда значение абсциссы или ординаты в местах пересечения этой окружности с осями О1О \hat{x} и О1О \hat{y}_i будет соответствовать ожидаемой выборочной оценке \tilde{r} между x_i и y_i на плоскости ОХ и ОY. При этом, однако, возможны два логических сценария проведения такой окружности.

На рисунок 17 плоскости системы координат «Мишень» нанесем «усеченные» данные рисунка 15, предварительно преобразованные по (38, 39, 40, 41). По числовым значениям $\hat{x}_i, \hat{x}'_i, \hat{y}_i, \hat{y}'_i$ видно, что экспериментальные точки расположились на участке плоскости координат в непосредственной близости к геометрическому центру «Мишени».

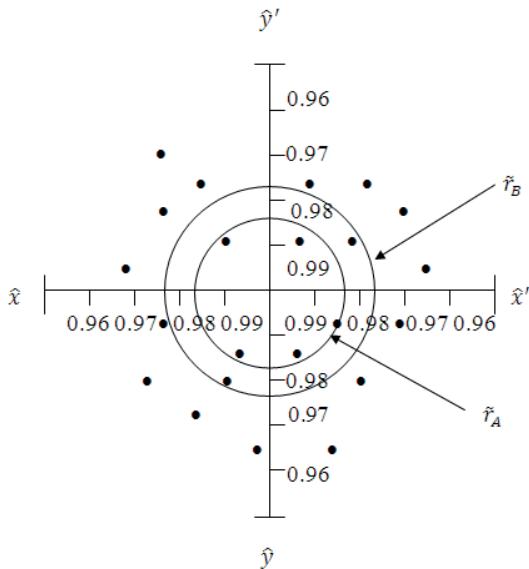


Рис.17. Распределение точек (\hat{x}_i / \hat{y}_i) “усеченной” пробы на плоскости “Мишени” ($n=22$, $\tilde{r}_A = 0.9838$, $\tilde{r}_B = 0.9794$).

Отдельно для \hat{x}_i , \hat{y}_i \hat{x}'_i , \hat{y}'_i вычислим средние геометрические: $\tilde{x}_i = \tilde{x}'_i = 0.9823$, $\tilde{y}_i = \tilde{y}'_i = 0.9853$.

Первая цифра отражает средний геометрический уровень отклонения отношений \hat{x}_i и \hat{x}'_i от 1 в распределении их значений на оси $O\hat{x}$, вторая цифра отражает аналогичный уровень отклонения отношений \hat{y}_i , \hat{y}'_i от 1 на оси $O\hat{y}_i$. Среднее геометрическое

$$\tilde{s}_{\hat{x}_i, \hat{y}_i} = \sqrt[44]{\prod_{i=1}^{44} (\hat{x}_i, \hat{x}'_i, \hat{y}_i, \hat{y}'_i)} = 0.9838 \quad (42)$$

отражает совместный средний геометрический уровень отклонения отношений \hat{x}_i, \hat{x}'_i , \hat{y}_i, \hat{y}'_i от 1. Если принять, что величина $\tilde{s}_{\hat{x}_i, \hat{y}_i}$ в системе координат «Мишень» является искомым числовым значением абсциссы или ординаты, через которое будет проходить окружность, проведенная из точки (1; 1), то для

данных рис.17 $\tilde{s}_{\hat{x}_i, \hat{y}_i} = \tilde{r}_A$ – ожидаемая оценка геометрического коэффициента корреляции между x_i и y_i по первому логическому сценарию ее расчета.

Вернемся к выражениям (38) и (39): $\hat{x}_i = x_i/\tilde{x}_i$, $\hat{y}_i = y_i/\tilde{y}_i$. Для сопряженных выборочных ($\hat{x}_i; \hat{y}_i$) запишем:

$$\hat{y}_i/\hat{x}_i = \frac{y_i/\tilde{y}_i}{x_i/\tilde{x}_i} = \frac{y_i/x_i}{\tilde{y}_i/\tilde{x}_i} = \frac{y_i/x_i}{(y_i/\tilde{x}_i)} . \quad (43)$$

Каждый i -й выборочный индекс отношений (\hat{y}_i/\hat{x}_i) равен отношению (индексу) между i -м выборочным (y_i/x_i) и выборочным средним (y_i/\tilde{x}_i) геометрическими индексами. При этом $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (\hat{y}_i/\hat{x}_i)} = (\hat{y}_i/\hat{x}_i) = 1$.

Все варианты $\hat{y}_i/\hat{x}_i > 1$ выразим в обратных величинах:

$$1 / (\hat{y}_i/\hat{x}_i) = \hat{x}_i/\hat{y}_i , \quad (44)$$

после чего становится возможным нанести выборочное распределение прямых и обратных индексов (\hat{y}_i/\hat{x}_i и \hat{x}_i/\hat{y}_i) на любую из осей координат «Мишени». В итоге, величина

$$\tilde{s}_{\hat{y}_i/\hat{x}_i} = \tilde{r}_B = \sqrt[22]{\prod_{i=1}^{22} (\hat{y}_i/\hat{x}_i, \hat{x}_i/\hat{y}_i)} \quad (45)$$

будет оценкой геометрического коэффициента корреляции по второму логическому сценарию ее расчета.

Для трансформированных на рис.17 «Мишени» данных «усеченной» выборки рис.15 среднее геометрическое $\tilde{r}_B = 0.9794$. Из начала координат на рис.17 проведем две окружности, пересекающие оси координат «Мишени» в точках 0.9838 (1 вариант) и 0.9794 (2 вариант). Выясним теперь, какая из этих величин действительно отражает корреляцию между x_i и y_i в «усеченной» выборке их значений на рис.15.

На рис. 17 оценка \tilde{r}_A отражает «средний геометрический уровень разнообразия» отношений \hat{x}_i, \hat{x}'_i , \hat{y}_i, \hat{y}'_i и информацию о связи самих переменных не содержит – это видно отчетливо. Понятно другое- в исходной и вспомогательной системах координат сопряженные значения переменных могут быть связаны друг с другом только в форме прямых (y_i/x_i и \hat{y}_i/\hat{x}_i) или обратных (x_i/y_i и \hat{x}_i/\hat{y}_i) индексов. Поэтому выборочной оценкой

геометрического коэффициента корреляции x_i и y_i правомерно считать величину \tilde{r}_B , как меру отклонения выборочных \hat{y}_i/\hat{x}_i и \hat{x}_i/\hat{y}_i от единицы на осях координат «Мишени».

Данные рис.15 преобразуем по (38, 39, 40, 41), нанесем на рис.18 «Мишени» и после процедуры (44) вычислим \tilde{r}_A и \tilde{r}_B . Из центра «Мишени» проведем две окружности, пересекающие оси координат в точках, численно соответствующих оценкам \tilde{r}_A и \tilde{r}_B , после чего сопоставим \tilde{r}_A и \tilde{r}_B рис.17 и рис.18.

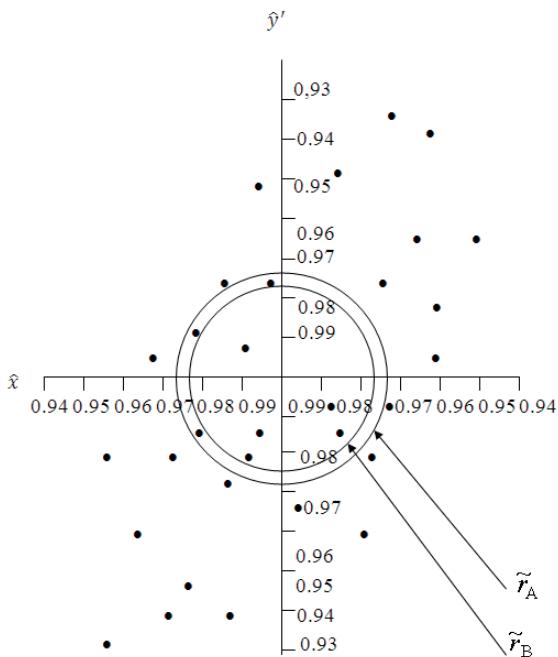


Рис.18. Распределение точек (\hat{x}_i/\hat{y}_i) исходной пробы на плоскости «Мишени» ($n=34$, $\tilde{r}_A = 0.9751$, $\tilde{r}_B = 0.9773$).

В числовом выражении $\tilde{r}_A=0.9838$ и $\tilde{r}_B=0.9794$ на рис.17 больше $\tilde{r}_A=0.9751$ и $\tilde{r}_B=0.9773$ на рис.18 в 1.009 и 1.002 раза, соответственно. То есть, в исходной выборке на рис.18 «совместный уровень разнообразия» \hat{x}_i и \hat{y}_i и, соответственно, «уровень разнообразия» \hat{y}_i/\hat{x}_i , \hat{x}_i/\hat{y}_i выше, чем в «усеченной» выборке на рис.17. При этом, «совместный уровень разнообразия» \hat{x}_i и \hat{y}_i на рис.18 выше «уровня разнообразия» совокупности прямых и обратных индексов отношений. На рис. 17 $\tilde{r}_A > \tilde{r}_B$ и экспериментальные точки распределены примерно на одинаковом расстоянии от центра «Мишени». Область рассеяния экспериментальных точек на рис.18, где $\tilde{r}_A < \tilde{r}_B$, растянута в направлении от третьей к первой четверти. Неравенство $\tilde{r}_A / \tilde{r}_B < 1$ однозначно символизирует о наличии статической функциональной связи между x_i и y_i на рис.18. Способ вычисления координат реперных точек для построения выборочной линии функциональной связи x_i и y_i – траектории геометрической прогрессии индексов y_i/x_i , подробно изложен в работе [12] и главе 2.

Заключение

Согласно представлению автора этих строк жизнь является одной из форм космической материи, которая при помощи энергии Солнца пожирает минеральные и органические ресурсы планеты Земля и самое себя. Очевидное для нас теперь существование глобальной трофической пирамиды живой материи свидетельствует о том, что природные процессы жизнедеятельности биологических систем разных уровней организации и отдельных элементов этих систем – живых организмов разной степени сложности – на планете Земля теснейшим образом взаимосвязаны между собой.

Поэтому для соблюдения условия взаимосвязанности между размерами и формой тела рыб в выборках, а также в совместной динамике значений самых разных пластических морфологических признаков в онтогенезе рыб разных видов использовано в предыдущих работах автора и здесь математической выражение – геометрическая прогрессия индексов y_i / x_i .

Для математического описания динамики значений разных пластических признаков при помощи геометрической прогрессии разработаны: алгоритм предварительного преобразования измеренных значений пластических признаков (приведение к длине тела, формулы расчета обратных значений признаков), алгоритмы расчета знаменателей q и значений ($\overrightarrow{n-1}$). Осуществлено введение в биологический анализ таких физических понятий, как условная масса тела и условная площадь поверхности тела с размерностью – сантиметр.

В качестве примера использования геометрической прогрессии в биологическом анализе вычислены знаменатели ГП моделей динамики значений отдельных признаков и формы тела самок и самцов речного гольяна из р. Утка (табл. 5 и 6, соответственно), значениям которых присвоен статус видовых констант.

При сравнении отдельных выборок измеренных значений одноименных и (или) разноименных пластических признаков использован метод трансформации измеренных значений модельной или какой-либо другой выборки по математическим моделям соответствующих признаков.

Формальную математическую оценку сходства или различия в строение тела рыб предложено проводить при помощи непараметрического парного критерия Вилкоксона. Эффективность алгоритма – парного критерия Вилкоксона – продемонстрирована на многочисленных примерах сравнительного анализа выборочных совокупностей разных пластических признаков и формы тела гольянов.

Оценка однонаправленности или разнонаправленности роста левой и правой сторон головы-биплатерального пластического признака – по мере роста длины тела рыб выполнены разными способами, одним из которых явился так называемый метод частных геометрических прогрессий.

Завершает работу логическое обоснование и иллюстрация алгоритма геометрического коэффициента корреляции. Его основополагающее отличие от коэффициента линейной корреляции Пирсона состоит в том, что данный показатель призван служить «оценкой» связи между x_i и y_i в точках $(x_i; y_i)$ выборки данных, в то время как r Пирсона представляет собой «оценку» отклонения точек $(x_i; y_i)$ выборки данных от линейной регрессии y_i по x_i или x_i по y_i .

Подведу краткий итог сказанному. Начиная с первых страниц работы ее автор обращает особое внимание на тот факт, что размеры тела и разных пластических признаков животных взаимосвязаны биологически, то есть при математической записи имеет место отношение x_i / y_i измеренных значений x_i и y_i , величина которых в процессе роста тела животных в онтогенезе увеличивается умножительно и примерно в одно и то же число раз. Следовательно математическое описание явлений роста и процесса динамики морфологического строения тела животных в онтогенезе должно выполняться в полном соответствии со спецификой биологической взаимосвязи размеров всех без исключения пластических морфологических признаков.

Соответствие разработанного автором и подробно проиллюстрированного выше математического метода биологическим свойствам живых организмов, а также его пригодность для математического описания природных

биологических явлений и процессов любезно предлагается оценить читателям данной работы.

23.02.2014 г.

г. Екатеринбург, Россия

Библиография

1. Мина М.В., Клевезаль Г.А. Рост животных. – М.: Наука, 1976. – 293с.
2. Количественные аспекты роста организмов. – М.: Наука, 1975. – 292с.
3. Рикер У.Е. Методы оценки и интерпретация биологических показателей популяций рыб. – М.: Пищ. Пром-ть, 1979. – 498с.
4. Глотов Н.В., Животовский Л.А., Хованов Н.В., Хромов-Борисов Н.Н. Биометрия. – Л.: Изд. ЛГУ, 1982. – 264с.
5. Беляев В.И. Новый взгляд на понятие корреляции пластических признаков животных и метод ее оценки. // В кн. Исследования эталонных природных комплексов Урала. Екатеринбург: «Екатеринбург», 2001. С. 24-33.
6. Беляев В.И. Об использовании веса головного мозга в популяционных исследованиях молоди карпа. – Экология, 1979, №5. С. 88-92.
7. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1987. – 430с.
8. Беляев В.И. Использование геометрической прогрессии y_i / x_i для оценки половых различий во внешнем облике животных (на примере рыб) // Науч. тр. Дальрыбвтуза. – Владивосток, 2012. – Т. 25. С. 23-35.
9. Беляев В.И. Описание динамики формы тела в онтогенезе животных одной выборкой особей (на примере рыб) // Науч. тр. Дальрыбвтуза. – Владивосток, 2012. – Т.26. С. 3-12.
- 10.Бронштейн В.И., Семенджиев К.А. Справочник по математике. – М.: Гос. Изд-во технико-теорет. лит-ры, 1953, –608с.
- 11.Беляев В.И. Оценка функциональных отношений биологических признаков животных в выборочных базах данных (на примере рыб) // Проблемы отдаленных экологических последствий радиационных инцидентов: Тоцкий ядерный взрыв. Екатеринбург, 2000. С. 88-98.
12. Беляев В.И. Принцип связи двух переменных в алгоритмах оценки функциональных отношений биологических признаков животных (на примере рыб) // Сибирский эколог. Ж. 2001. №5. С. 637-643.

13. Беляев В.И., Русанов В.В. Отражение статики и динамики формы тела животных при помощи модели двумерного изометрического виртуального облика (на примере рыб) // Вест. Тюменского гос. Ун-та. – Тюмень. 2005. №5. С. 202-212.
- 14.Преснов Е.В. Классификация биологических форм // Математическая биология развития. – М.: Наука, 1982. С. 126-135.
15. Мартынов Л.А. Роль макроскопических процессов в формообразовании (математические модели) // Математическая биология развития. – М.: Наука, 1982. С. 145-154.
- 16.Эренберг А. А. Анализ и интерпретация статистических данных. – М.: Финансы и статистика, 1981, – 408с.
- 17.Смирнов В.С., Божко А.М., Рыжков Л.П., Добринская Л.А. Применение метода морфофизиологических индикаторов в экологии рыб // Труды Сев НИОРХ, 1972. – Петрозаводск, Том. 7. -168с.
- 18.Беляев В.И. Концептуальный подход к проблеме количественной оценки роста и развития животных // Анализ размерной и возрастной структуры популяций позвоночных. Сб. науч. трудов ИЭРиЖ УрО АН СССР, 1988. – Свердловск, С. 4-20.
- 19.Объекты биологии развития. – М.: Наука, 1975. –580с.
- 20.Беляев В.И. К вопросу об относительности размеров и возраста животных. – Экология, 1991. №4. С. 61-68.
- 21.Шмидт-Ниельсен К. Размеры животных: почему они так важны? – М.: Мир, 1987. –264с.
- 22.Беляев В.И. Оценка роста и динамики формы тела животных с позиции закона геометрического роста. – Рукопись депонирована в ВИНТИ, 05.06.1985. №4212 – 85деп. – 54с.
- 23.Коновалов С.М. Особенности возрастной структуры субизолятов нерки *Oncorhynchus nerka* (Walbaum) в первом поколении // В кн.: Популяционная биология и систематика лососевых. – Владивосток, 1980. С. 3-10.

- 24.Лукьянчиков Ф.В. Рыбы системы реки Хатанги // Труды Красноярского отд. СибНИИРХ, 1967. Т. 9. С. 11-93.
- 25.Зайцев Г.Н. Математическая статистика в экспериментальной ботанике. – М.: Наука, 1984, – 424с.
- 26.Смирнов В.С., Божко А.М., Рыжков Л.П., Добринская Л.А. Основные требования к сбору и обработке материала по костистым рыбам при использовании метода морфофизиологических индикаторов // Типовые методики исследования продуктивности видов рыб в пределах их ареалов. – Вильнюс, 1974. Ч. 1. С. 26-36.
- 27.Сукацкас В.Т. Биометрические проблемы исследования рыб (*Salmo*) в пределах ареала // Типовые методики исследования продуктивности видов рыб в пределах их ареалов. – Вильнюс, 1974. – ч. 1. С. 13-21.
- 28.Шапошникова Г.Х., Дорофеева Е.А. Таблицы промеров рыб семейства Salmononidae // Типовые методики исследования продуктивности видов рыб в пределах их ареалов. – Вильнюс, 1974. – ч. 1. С. 22-25.
- 29.Скрябин А.Г. Сиговые рыбы юга Сибири. – Новосибирск: Наука. Сиб. Отд-ние, 1979. –230с.
- 30.Александер Р. Биомеханика. – М.: Мир, 1979. –340с.
- 31.Захаров В.М. Асимметрия животных (популяционно-феногенетический подход). – М.: Наука, 1987. – 216с.
- 32.Гилева Э.А., Косарева Н.Л. Уменьшение флюктуирующей асимметрии у домовых мышей на территориях, загрязненных химическими и радиоактивными мутагенами // Экология. 1994. №3. С. 94-97.

Приложения

Таблица 1П

Измеренные (в см.) значения пластических признаков самок речного гольяна из р. Утка в модельной выборке особей (2004г., n=25):

№ п/п	Признаки (в сантиметрах)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	3.01	0.6526	0.13	0.68	1.37	1.84	1.16	1.17	0.48	0.33	0.20
2	3.05	0.6542	0.14	0.66	1.37	1.90	1.24	1.15	0.49	0.36	0.16
3	3.05	0.6811	0.13	0.65	1.41	1.92	1.27	1.13	0.48	0.37	0.19
4	3.05	0.6840	0.16	0.70	1.45	1.90	1.20	1.15	0.50	0.32	0.19
5	3.06	0.6495	0.15	0.68	1.40	1.87	1.19	1.19	0.50	0.32	0.17
6	3.09	0.7159	0.13	0.66	1.48	1.98	1.32	1.11	0.47	0.37	0.18
7	3.09	0.6739	0.14	0.69	1.41	1.91	1.22	1.18	0.48	0.35	0.19
8	3.12	0.6604	0.15	0.69	1.48	1.94	1.25	1.18	0.46	0.32	0.18
9	3.13	0.6896	0.14	0.74	1.44	1.95	1.21	1.18	0.50	0.37	0.18
10	3.15	0.7230	0.18	0.73	1.50	2.00	1.27	1.15	0.48	0.39	0.22
11	3.19	0.7306	0.21	0.78	1.50	2.03	1.25	1.16	0.55	0.40	0.21
12	3.24	0.7708	0.19	0.75	1.49	2.00	1.25	1.24	0.52	0.44	0.22
13	3.28	0.7007	0.14	0.71	1.55	2.11	1.40	1.17	0.52	0.37	0.20
14	3.30	0.7368	0.14	0.72	1.49	2.06	1.34	1.24	0.53	0.35	0.21
15	3.31	0.7617	0.20	0.80	1.60	2.11	1.31	1.20	0.57	0.40	0.21
16	3.35	0.7489	0.18	0.79	1.55	2.07	1.28	1.28	0.59	0.39	0.22
17	3.36	0.7477	0.16	0.77	1.55	2.13	1.36	1.23	0.54	0.40	0.19
18	3.40	0.7405	0.14	0.77	1.53	2.11	1.34	1.29	0.55	0.31	0.22
19	3.41	0.7802	0.18	0.76	1.62	2.19	1.43	1.22	0.61	0.41	0.21
20	3.42	0.7249	0.20	0.78	1.59	2.15	1.37	1.24	0.52	0.36	0.20
21	3.45	0.8000	0.19	0.77	1.65	2.20	1.43	1.25	0.55	0.45	0.23
22	3.46	0.7835	0.16	0.77	1.62	2.21	1.44	1.25	0.59	0.42	0.23
23	3.46	0.7319	0.19	0.80	1.58	2.20	1.40	1.26	0.50	0.38	0.22
24	3.48	0.8330	0.17	0.76	1.65	2.24	1.48	1.24	0.63	0.47	0.25
25	3.48	0.7691	0.16	0.78	1.55	2.16	1.38	1.32	0.57	0.41	0.22

где: 1 – длина тела промысловая, от кончика рыла до конца чешуйного покрова (l); 2 – масса тела (Q); 3 – длина рыла (aO); 4 – длина головы слева (lC); 5 –

расстояние до брюшного плавника (aV); 6 – расстояние до анального плавника (aA); 7 – линейный размер брюшного отдела ($aA - lC$); 8 – длина хвостового стебля ($l - aA$); 9 – максимальная высота тела (H) в основании брюшного плавника; 10 – максимальная толщина тела (B); 11 – минимальная высота тела в шейке хвостового стебля (h).

Примечание: масса тела самок гольяна в таблице 1П и самцов гольяна в таблице 2П приложения представлена в сантиметрах; для перевода в граммы требуется любое табличное значение массы тела возвести в куб (см. глава 1 и [13, 8, 9]).

Модельные отношения между выборочной средней геометрической длиной тела и выборочными средними геометрическими значениями всех других признаков самок в модельной выборке особей. Цифровое обозначение признаков соответствует их словесному названию в таблице 1П исходных данных самок.

$$\tilde{l}/\tilde{2}=4.490178; \quad \tilde{l}/\tilde{3}=20.245796; \quad \tilde{l}/\tilde{4}=4.429446; \quad \tilde{l}/\tilde{5}=2.152074; \quad \tilde{l}/\tilde{6}=1.591035; \\ \tilde{l}/\tilde{7}=2.484595; \quad \tilde{l}/\tilde{8}=2.696056; \quad \tilde{l}/\tilde{9}=6.190219; \quad \tilde{l}/\tilde{10}=8.644018; \quad \tilde{l}/\tilde{11}=16.023801.$$

Модельные отношения между выборочной средней геометрической длиной тела и выборочными средними геометрическими значениями всех других признаков самцов в модельной выборке особей:

$$\tilde{l}/\tilde{2}=4.55344; \quad \tilde{l}/\tilde{3}=19.50431; \quad \tilde{l}/\tilde{4}=4.37071; \quad \tilde{l}/\tilde{5}=2.20851; \quad \tilde{l}/\tilde{6}=1.60542; \quad \tilde{l}/\tilde{7}=2.53828; \\ \tilde{l}/\tilde{8}=2.65375; \quad \tilde{l}/\tilde{9}=6.23960; \quad \tilde{l}/\tilde{10}=8.99674; \quad \tilde{l}/\tilde{11}=15.66007.$$

Таблица 2П

Измеренные (в см.) значения пластических признаков самцов речного гольяна из р. Утка в модельной выборке особей (2006г., n=25):

№ п/п	Признаки (в сантиметрах)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	3.03	0.7034	0.17	0.76	1.44	1.96	1.20	1.07	0.49	0.38	0.21
2	3.04	0.6753	0.17	0.71	1.41	1.88	1.17	1.16	0.49	0.35	0.20
3	3.05	0.6724	0.16	0.70	1.41	1.90	1.20	1.15	0.46	0.35	0.20
4	3.05	0.6753	0.16	0.70	1.38	1.89	1.19	1.16	0.53	0.31	0.18
5	3.07	0.6840	0.14	0.70	1.41	1.94	1.24	1.13	0.47	0.37	0.20
6	3.10	0.6664	0.14	0.70	1.39	1.90	1.20	1.20	0.50	0.35	0.19
7	3.11	0.6790	0.16	0.71	1.38	1.99	1.27	1.12	0.50	0.34	0.19
8	3.14	0.6818	0.16	0.71	1.44	1.94	1.23	1.20	0.52	0.34	0.17
9	3.14	0.6581	0.19	0.75	1.47	1.94	1.19	1.20	0.49	0.34	0.18
10	3.16	0.6973	0.18	0.71	1.41	1.91	1.20	1.25	0.49	0.37	0.22
11	3.19	0.7133	0.13	0.71	1.47	2.01	1.30	1.18	0.52	0.37	0.19
12	3.20	0.6882	0.21	0.77	1.50	2.04	1.27	1.16	0.48	0.32	0.20
13	3.20	0.6952	0.15	0.70	1.45	1.96	1.26	1.24	0.49	0.34	0.21
14	3.20	0.7153	0.15	0.71	1.43	2.00	1.29	1.20	0.52	0.38	0.21
15	3.24	0.7054	0.16	0.71	1.44	2.01	1.30	1.23	0.51	0.35	0.21
16	3.27	0.7477	0.20	0.79	1.54	2.13	1.34	1.14	0.54	0.37	0.22
17	3.27	0.7635	0.14	0.73	1.47	2.05	1.32	1.22	0.58	0.41	0.23
18	3.28	0.6910	0.18	0.75	1.44	2.00	1.25	1.28	0.51	0.34	0.20
19	3.32	0.7606	0.14	0.79	1.49	2.08	1.29	1.24	0.55	0.40	0.23
20	3.34	0.7047	0.15	0.73	1.48	2.05	1.32	1.29	0.52	0.36	0.20
21	3.40	0.7140	0.18	0.77	1.49	2.08	1.31	1.32	0.55	0.34	0.21
22	3.44	0.7429	0.18	0.78	1.55	2.17	1.39	1.27	0.52	0.36	0.21
23	3.48	0.7797	0.17	0.79	1.51	2.15	1.36	1.33	0.59	0.39	0.23
24	3.49	0.8010	0.18	0.79	1.59	2.19	1.40	1.30	0.61	0.44	0.25
25	3.49	0.7312	0.19	0.81	1.54	2.15	1.34	1.34	0.52	0.33	0.22

Примечание: цифровые обозначения пластических признаков самцов в данной таблице такие же, как у признаков самок в предыдущей таблице.

Расчет значений знаменателя q геометрических прогрессий рядов средних геометрических значений $\tilde{x}_{i,k}$, $\tilde{y}_{i,k}$, $\tilde{F'_{i,k}}$ самок речного гольяна проведен по данным табл.5 из главы 3. При $n=10$ в соотношении (25) имеем: $q(\tilde{1})=1.062719$; $q(\tilde{2})=1.068343$; $q(\tilde{3})=1.072548$; $q(\tilde{4})=1.057019$; $q(\tilde{5})=1.06086$; $q(\tilde{6})=1.063398$; $q(\tilde{7})=1.066595$; $q(\tilde{8})=1.061799$; $q(\tilde{9})=1.075972$; $q(\tilde{10})=1.076098$; $q(\tilde{11})=1.074304$; $q(\tilde{F'_{i,k}})=1.067672$ (первая модель); $q(\tilde{4})=1.068449$ (обратные величины, см. текст); $q(\tilde{5})=1.064583$ (обратные величины); $q(\tilde{8})=1.063640$ (обратные величины); $q(\tilde{F'_{i,k}})=1.069382$ (вторая модель, $n=10$, по прямым и обратным величинам признаков).

Расчетные значения знаменателей геометрических прогрессий q рядов средних геометрических значений признаков $\tilde{x}_{i,k}$, $\tilde{y}_{i,k}$, $\tilde{F'_{i,k}}$ самцов речного гольяна, вычисленные для интервала средних значений длины тела от $\tilde{2.88}$ см до $\tilde{6.82}$ см. в табл. 6. При $n=10$ в соотношении (25) имеем: $q(\tilde{1})=1.05552$; $q(\tilde{2})=1.06235$; $q(\tilde{3})=1.06155$; $q(\tilde{4})=1.05082$; $q(\tilde{5})=1.05132$; $q(\tilde{6})=1.05392$; $q(\tilde{7})=1.05566$; $q(\tilde{8})=1.05814$; $q(\tilde{9})=1.07267$; $q(\tilde{10})=1.06912$; $q(\tilde{11})=1.07333$; $q(\tilde{F'_{i,k}})=1.06086$ (первая модель); $q(\tilde{4})=1.06023$ (обратные величины); $q(\tilde{5})=1.05973$ (обратные величины); $q(\tilde{6})=1.05711$ (обратные величины); $q(\tilde{F'_{i,k}})=1.06297$ (вторая модель, $n=10$, по прямым и обратным величинам признаков).

Содержание

Введение.....	1
Глава 1.	
Создание математической модели формы тела животных.....	7
1.1. Построение виртуальной модели зрительного облика животных.....	7
1.2. Способ расчёта собственных размеров пластических признаков и собственного возраста животных.....	17
Глава 2.	
Математическое описание динамики значений разных пластических признаков в онтогенезе животных.....	33
2.1. Выбор математического выражения.....	33
2.2. Оценка половых различий по форме тела у рыб на примере самок и самцов речного гольяна.....	37
Глава 3.	
Использование математических моделей в анализе процессов роста животных.....	55
3.1. Информативность второй математической модели динамики формы тела гольянов.....	55
Глава 4.	
Определение количественных характеристик разных состояний билатеральных признаков животных.....	65
Глава 5.	
Новый взгляд на понятие корреляции пластических признаков животных и метод её оценки.....	83
Заключение.....	93
Библиография.....	97
Приложения.....	101